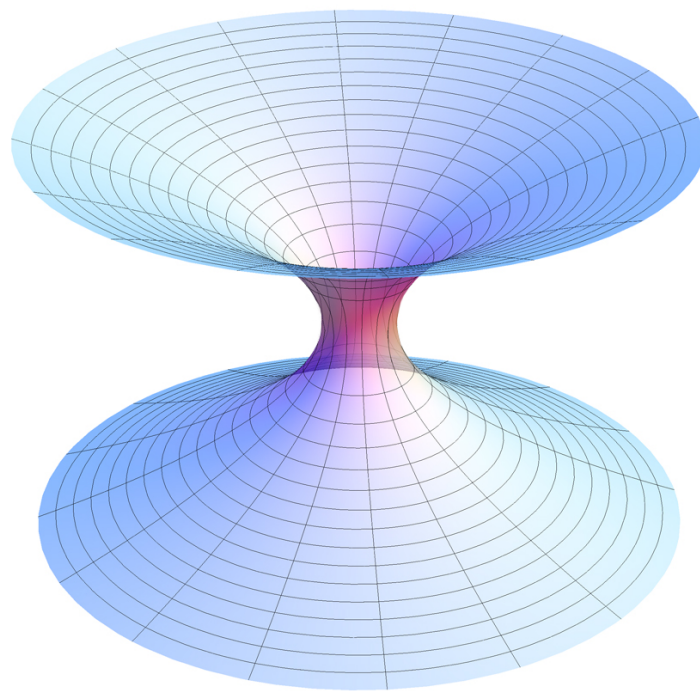
Analisi Matematica II

per Ingegneria Informatica

"E' molto semplice essere felici, ma è molto difficile essere semplici."

Rabindranath Tagore (1861-1941)

di Roberto Tauraso

a cura di Massimiliano Pompegnani

Indice

1 Integrali multipli **5**

1.1 Integrali doppi su rettangoli . . . 5
1.2 Integrali doppi su insiemi generali . . . 7
1.3 Domini semplici e formule di riduzione . . . 8
1.4 Cambiamento di variabili . . . 13
1.5 Integrali tripli . . . 24
1.6 Cambiamenti di variabile negli integrali tripli . . . 29
1.7 Applicazioni in geometria e in fisica . . . 36
1.8 Esercizi e prove d'esame . . . 45

2 Integrali curvilinei **139**

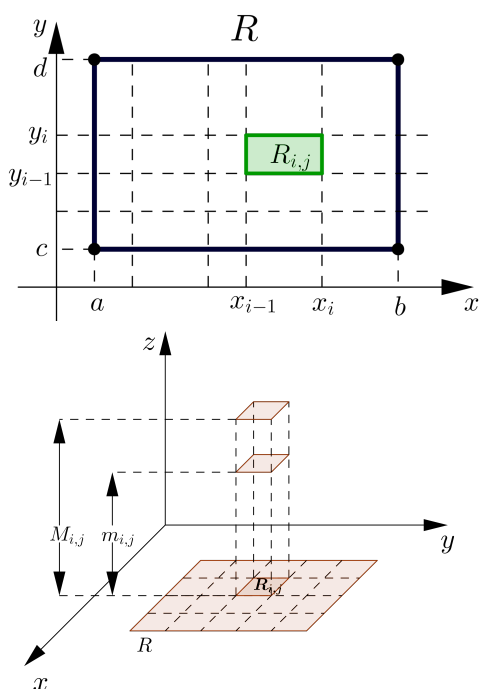
2.1 Curve nel piano e rappresentazioni parametriche . . . 139
2.2 Integrali curvilinei del primo tipo . . . 141
2.3 Curve equivalenti . . . 145
2.4 Forme differenziali lineari in $\mathbb{R}^2$ . . . 146
2.5 Insiemi connessi. Forme differenziali esatte . . . 149
2.6 Forme differenziali chiuse. Il teorema di Gauss-Green. . . . 152
2.7 Forme differenziali in insiemi non semplicemente connessi . . . 158
2.8 Costruzione della funzione potenziale . . . 161
2.9 Esercizi e prove d'esame . . . 165

A Simmetrie e quadriche **215**

A.1 Rappresentazione e proprietà degli insiemi nel piano . . . 215
A.2 Quadriche . . . 221

Capitolo 1

Integrali multipli

1.1 Integrali doppi su rettangoli

L'idea di integrale doppio di una funzione reale di due variabili è una naturale estensione della definizione data per le funzioni di una variabile. Cominciamo a vedere il caso più semplice delle funzioni definite su un rettangolo $R = [a, b] \times [c, d]$ contenuto in $\mathbb{R}^2$. Consideriamo una partizione σ di R di $m \times n$ rettangoli del tipo

$$R_{i,j} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j],$$

dove

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b$$
$$b = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{n-1} < y_n = d;$$

sia ora $f : R \to \mathbb{R}$ una funzione *limitata*

$$m \leq f(x, y) \leq M, \quad \forall\ (x, y) \in R,$$

e poniamo

$$m_{i,j} = \inf\{f(x, y) : (x, y) \in R_{i,j}\}, \qquad M_{i,j} = \sup\{f(x, y) : (x, y) \in R_{i,j}\}.$$

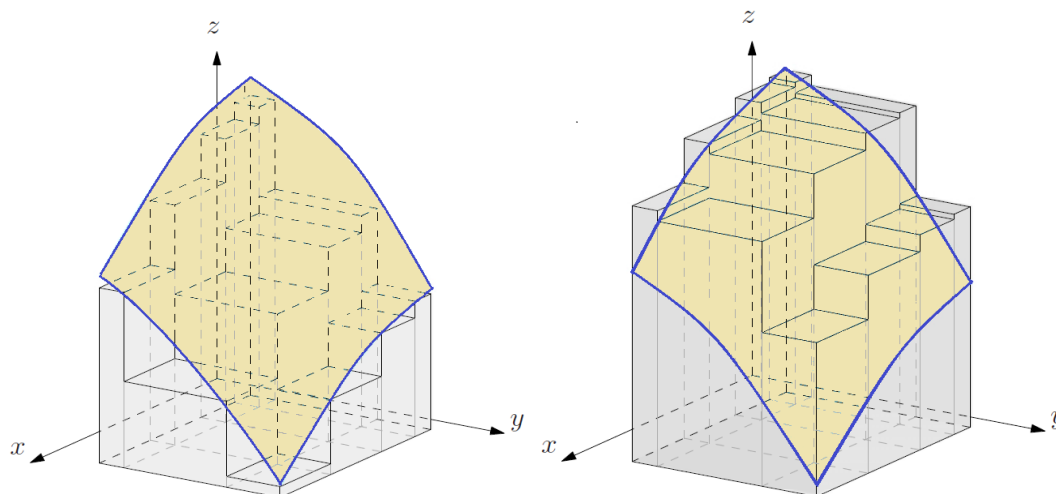
Definiamo somma integrale inferiore e somma integrale superiore di f relativa alla partizione σ rispettivamente, le somme

$$s(f, \sigma) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}),$$
$$S(f, \sigma) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} M_{i,j}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}).$$

Osserviamo subito che, indicata con

$$m(R) = |R| = (b - a)(d - c)$$

la misura, cioè l'area, del rettangolo R, per la limitatezza della funzione f, per ogni suddivisione σ e σ' del rettangolo R,

$$m(b - a)(d - c) \leq s(f, \sigma) \leq S(f, \sigma') \leq M(b - a)(d - c).$$

Pertanto l'estremo superiore delle somme inferiori e l'estremo inferiore delle somme superiori sono quantità limitate e soddisfano le disequazioni

$$m(b-a)(d-c) \leq \inf_R S(f,\sigma), \qquad \sup_R s(f,\sigma) \leq M(b-a)(d-c).$$

Allora possono accadere una delle due seguenti circostanze

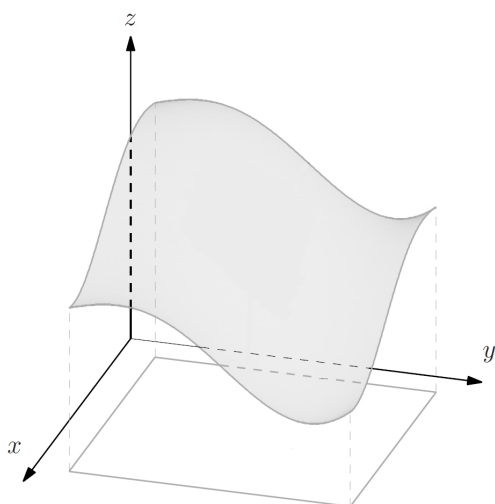
$$\inf_R S(f,\sigma) = \sup_R s(f,\sigma), \quad \text{oppure} \quad \sup_R s(f,\sigma) < \inf_R S(f,\sigma).$$

Diremo che f è *integrabile* su R se

$$\inf_R S(f,\sigma) = \sup_R s(f,\sigma),$$

e il valore di tale uguaglianza si chiama integrale doppio di f su R e si indica con i simboli

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy, \qquad \int_{x=a}^{b}\int_{y=c}^{d} f(x,y)\,dxdy.$$

Si può osservare che se $f(x,y) \geq 0$ allora l'integrale doppio fatto sul rettangolo R si può interpretare come il *volume* della regione tridimensionale limitata dal basso dal rettangolo R e dall'alto dal grafico della funzione f. Si presenta in modo naturale l'esigenza di stabilire l'integrabilità di una funzione, cioè di caratterizzare la classe delle funzioni integrabili, e successivamente di calcolare l'integrale. Un criterio necessario e sufficiente di integrabilità è dato dal seguente teorema, analogo a quello per le funzioni di una variabile.

Teorema 1.1

Sia $f : R \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Allora f risulta integrabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una partizione σ_ε di R tale che

$$S(\sigma_\varepsilon, f) - s(\sigma_\varepsilon, f) < \varepsilon.$$

Grazie al Teorema 1.1 si ottiene il risultato seguente.

Teorema 1.2 (Le funzioni continue sono integrabili)

Se f una funzione continua allora è integrabile in R.

Dimostrazione. Si tratterà di dimostrare che

$$S(f,\sigma_\varepsilon) - s(f,\sigma_{f,\varepsilon}) < \varepsilon.$$

Poiché il rettangolo R è compatto, cioè chiuso e limitato, e la funzione f è continua su R, allora f è anche uniformemente continua su R, ossia

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 : (x',y'),(x'',y'') \in R, \quad |(x',y') - (x'',y'')| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x',y') - f(x'',y'')| < \varepsilon.$$

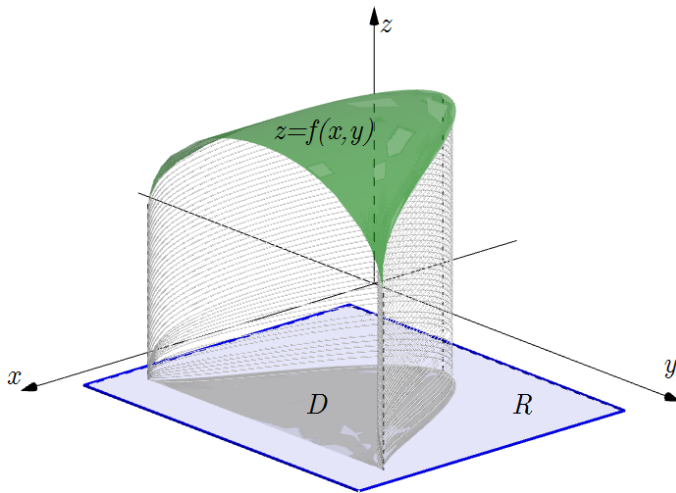
Sia σ_ε una partizione di R tale che la diagonale di ogni rettangolo R_{ij} sia minore di δ. In ogni rettangolo R_{ij} la funzione f ammette massimo e minimo assoluto (per il teorema di Weierstrass)

$$M_{i,j} = \max_{R_{ij}} f = f(x'_{ij}, y'_{ij}) \quad \text{per qualche } (x'_{ij}, y'_{ij}) \in R_{ij}$$
$$m_{i,j} = \min_{R_{ij}} f = f(x''_{ij}, y''_{ij}) \quad \text{per qualche } (x''_{ij}, y''_{ij}) \in R_{ij}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
S(f,\sigma_\varepsilon) - s(f,\sigma_\varepsilon) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} M_{i,j}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x'_{ij}, y'_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x''_{ij}, y''_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x'_{ij}, y'_{ij})|R_{ij}| - f(x''_{ij}, y''_{ij})|R_{ij}| = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \left(f(x'_{ij}, y'_{ij}) - f(x''_{ij}, y''_{ij})\right)|R_{ij}| \\
&\leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \varepsilon |R_{ij}| = \varepsilon |R|,
\end{aligned}$$

e per l'arbitrarietà di ε si ha la tesi.

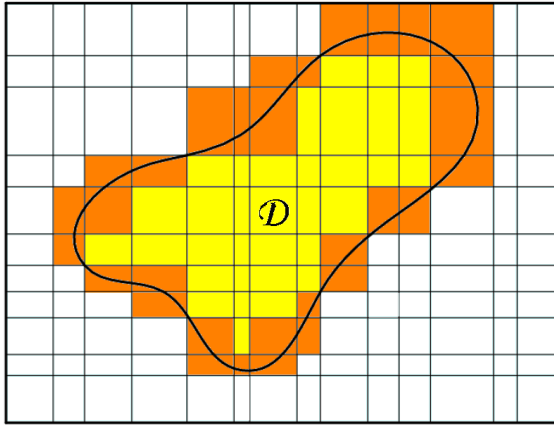
1.2 Integrali doppi su insiemi generali

La definizione di integrale doppio per le funzioni definite su rettangoli risulta essere troppo restrittiva. Consideriamo allora un sottoinsieme di $D \subset \mathbb{R}^2$ e sia f una funzione limitata. Se R è un rettangolo che contiene D allora estendiamo $f : D \to \mathbb{R}$ a $\tilde{f} : R \to \mathbb{R}$ nel modo seguente

$$\tilde{f} = \begin{cases} f(x,y), & \text{se} \quad (x,y) \in D \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) \in R \setminus D \end{cases}.$$

Diciamo che f è integrabile su D se $\tilde{f}$ è integrabile su R e si pone

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_R \tilde{f}(x,y)\,dxdy.$$

Si noti che se f è una funzione continua in generale l'estensione $\tilde{f}$ non lo è e quindi non è detto che $\tilde{f}$ si integrabile su R. Come vedremo l'integrabilità di f su D dipende dalla regolarità del bordo ∂D definito come

$$\partial D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \forall\, \varepsilon > 0,\ B((x,y),\varepsilon) \cap D \neq 0,\ \text{e } B((x,y),\varepsilon) \cap D^c \neq 0\},$$

dove $B((x,y))$ è il disco aperto di centro (x,y) e raggio ε. Sia D dunque un insieme limitato di $\mathbb{R}^2$. L'insieme D si dice misurabile se la sua funzione caratteristica

$$\chi_D(x,y) := \begin{cases} 1, & \text{se} \quad (x,y) \in D \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus D \end{cases}$$

è integrabile su D. La misura di D si indica con $m(D) = |D|$ e si pone

$$m(D) = |D| = \iint_D \chi_D(x,y)\, dxdy.$$

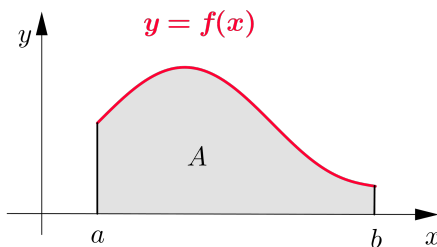
Considerando una partizione σ del rettangolo R che contiene l'insieme D indicando con $s(\chi_d,\sigma)$ la somma delle aree dei rettangoli individuati da σ *completamente contenuti* in D (indicati in figura in giallo) e con $S(\chi_d,\sigma)$ la somma delle aree dei rettangoli individuati da σ che *contengono* D (indicati in figura in arancione e in giallo), si ha che

$$S(\chi_d,\sigma) - s(\chi_d,\sigma) = \text{somma delle aree dei rettangoli che intersecano } \partial D.$$

Dato che per la misurabilità di D tale differenza può essere resa arbitrariamente piccola ne segue che *un insieme limitato è misurabile se e solo se la sua frontiera ha misura nulla, ossia* $|\partial D| = 0$. Ad esempio, in $\mathbb{R}^2$, un insieme costituito da un numero finito di punti ha misura nulla, così come un segmento di una retta. Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora il suo grafico ha misura nulla. Precisiamo che in questo caso si sta misurando l'area dell'insieme e non la sua lunghezza. Combinando le precedenti osservazioni con il Teorema 1.2 si può dimostrare il risultato seguente.

Teorema 1.3

Sia D un insieme *limitato e misurabile* di $\mathbb{R}^2$ e sia $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione *limitata e continua* in D allora f è integrabile su D.

1.3 Domini semplici e formule di riduzione

Da quanto detto nella sezione precedente se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua allora il trapezoide A individuato da dal grafico di f sull'intervallo $[a,b]$ è misurabile. Inoltre se $f(x) \geq 0$, allora la misura di A è l'integrale della funzione f sull'intervallo $[a,b]$,

$$m(A) = |A| = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Più in generale, se $\varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ sono due funzioni continue tali che $\varphi_2 \geq \varphi_1$ possiamo definire il dominio misurabile

$$D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b],\ y \in [\varphi_1(x), \varphi_2(x)]\big\}$$

che chiameremo dominio semplici rispetto all'asse y. In modo simile, se $\psi_1, \psi_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ sono due funzioni continue tali che $\psi_2 \geq \psi_1$ possiamo definire il dominio misurabile

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c,d],\ x \in [\psi_1(y), \psi_2(y)]\}$$

che chiameremo domini semplici rispetto all'asse x.

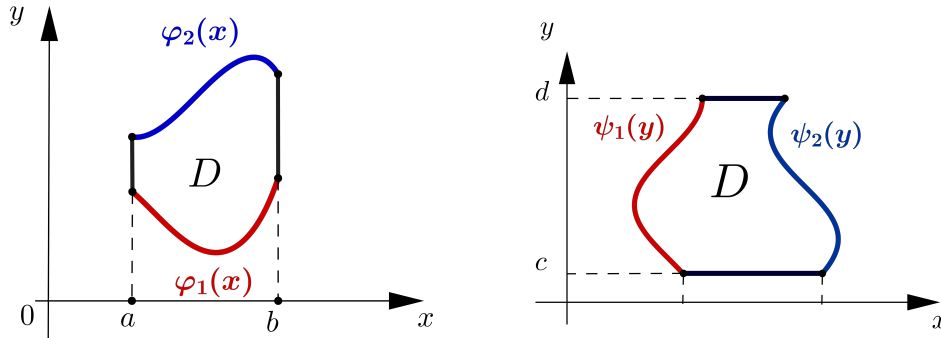



Figura 1.1: Domini semplici rispetto all'asse y e all'asse x.

Ad esempio, il cerchio $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ è una regione semplice rispetto ad entrambi gli assi, essendo delimitata dai grafici di $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ o dai grafici di $x = \pm\sqrt{1-y^2}$. Dunque si tratta di un insieme misurabile ed è facile verificare che la sua misura, la sua area, vale π. Il seguente teorema, che ci limitiamo ad enunciare, illustra come il calcolo di un integrale doppio si può ridurre al calcolo di due integrali ordinari.

Teorema 1.4 (Formule di riduzione)

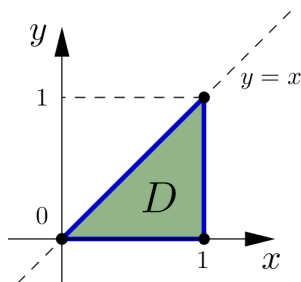
Sia D un dominio semplice di $\mathbb{R}^2$ e sia f continua in D. Allora:

1. se D è semplice rispetto all'asse y vale la formula

$$\iint_D f(x,y)\, dxdy = \int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\ dy \right) dx \tag{1.1}$$

2. se D è semplice rispetto all'asse x vale la formula

$$\iint_D f(x,y)\, dxdy = \int_{y=c}^{d} \left(\int_{x=\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\ dy \right) dx \tag{1.2}$$

Esempio 1.1. Calcolare l'integrale della funzione $f(x,y) = xy$, sul triangolo chiuso di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$. Scritto in forma simbolica, si tratta di calcolare

$$\iint_D xy\, dxdy, \quad \text{dove} \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x,\ 1 \leq x \leq 0,\ y \geq 0\}.$$

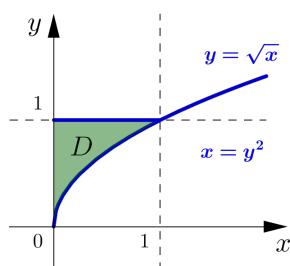
Prima di tutto notiamo che la funzione f è definita e continua in tutto $\mathbb{R}^2$, pertanto, a maggior ragione, lo è anche in D e quindi risulta integrabile. L'insieme D è compatto, cioè chiuso e limitato, e misurabile avendo la frontiera, composta dall'unione di tre rette, di misura zero. Pertanto l'integrale è ben definito. Per il calcolo, si può osservare che D è semplice rispetto ad entrambi gli assi. Procediamo in entrambi i modi. Considerando D semplice rispetto all'asse y:

$$\int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=0}^{y=x} xy\ dy \right) dx = \int_{x=0}^{1} x \left(\int_{y=0}^{y=x} y\ dy \right) dx = \int_{x=0}^{1} x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=x} dx = \int_{x=0}^{1} x \cdot \frac{x^2}{2}\ dx = \left[\frac{x^4}{8} \right]_{x=0}^{1} = \frac{1}{8}.$$

Considerando D semplice rispetto all'asse x:

$$\int_{y=0}^{1}\left(\int_{x=y}^{x=1} xy\,dy\right)dx=\int_{y=0}^{1} y\left(\int_{x=y}^{x=1} x\,dx\right)dy=\int_{y=0}^{1} y\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=y}^{x=1}dy=\int_{y=0}^{1}\frac{y}{2}-\frac{y^3}{2}\,dy=\left[\frac{y^2}{4}-\frac{y^4}{8}\right]_{y=0}^{1}=\frac{1}{8}.$$

Esempio 1.2. Calcolare l'integrale

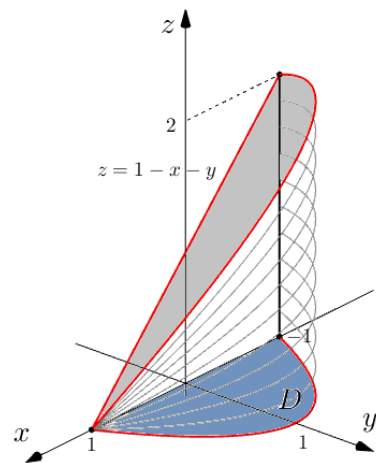
$$\iint_D e^{y^3}\,dxdy,\quad \text{dove}\quad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:0\le x\le 1,\ \sqrt{x}\le y\le 1\}.$$

La funzione f è continua in D e quindi risulta integrabile. L'insieme D è compatto, cioè chiuso e limitato, e misurabile avendo la frontiera composta dall'unione di due rette e dal grafico di una funzione continua, di misura zero. Pertanto l'integrale è ben definito. Per il calcolo, si può osservare che D è semplice rispetto ad entrambi gli assi. Procediamo in entrambi i modi. Considerando D semplice rispetto all'asse y:

$$\int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=\sqrt{x}}^{y=1} e^{y^3}\,dy\right)dx.$$

In questo caso l'integrale in y non è risolubile attraverso funzioni elementari. Ora proviamo ad effettuare il calcolo considerando D semplice rispetto all'asse x:

$$\int_{y=0}^{1}\left(\int_{x=0}^{x=y^2} e^{y^3}\,dy\right)dx=\int_{y=0}^{1} e^{y^3}\left(\int_{x=0}^{x=y^2} dx\right)dy=\int_{y=0}^{1} y^2e^{y^3}\,dy=\int_{y=0}^{1} e^{y^3}\,d\left(\frac{y^3}{3}\right)=\left[\frac{e^{y^3}}{3}\right]_{y=0}^{1}=\frac{e-1}{3}.$$

Esempio 1.3. Calcolare il volume dell'insieme E dato da

$$E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: y\ge 0,\ z\ge 0,\ x-y+z\le 1,\ y\le 1-x^2\}.$$

L'insieme E è delimitato dal piano di equazione $z=1-x+y$, la superficie parabolica individuata dalla parabola nel piano xy di equazione $y=1-x^2$, e i piani $z=0$ e $y=0$. La figura risulta contenuta nel semispazio $z\ge 0$ e $y\ge 0$ positive. Conviene considerare come dominio di variazione delle variabili x e y l'insieme

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:-1\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x^2\},$$

e come funzione l'equazione del piano $f(x,y)=1-x+y$. In tal modo si tratta di calcolare

$$|E|=\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_{x=-1}^{1}\left(\int_{y=0}^{1-x^2}(1-x+y)dy\right)dx$$

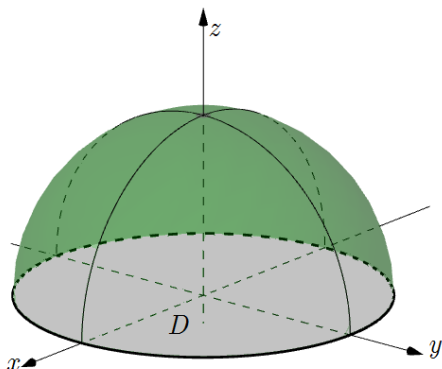
$$=\int_{x=-1}^{1}\left[y-xy+\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{1-x^2}dx$$

$$=\int_{x=-1}^{1}\left((1-x^2)-x(1-x^2)+\frac{(1-x^2)^2}{2}\right)dx.$$

Dato che le funzioni $(1-x^2)$ e $(1-x^2)/2$ sono pari e che la funzione $x(1-x^2)$ è dispari e che l'intervallo di integrazione simmetrico è rispetto l'origine, si ha

$$=2\int_{x=0}^{1}\left((1-x^2)+\frac{(1-x^2)^2}{2}\right)dx=2\int_{x=0}^{1}\left(1-x^2+\frac{1}{2}(1-2x^2+x^4)\right)dx=2\left[\frac{3x}{2}-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^5}{10}\right]_{x=0}^{1}$$

$$=2\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{10}\right)=\frac{28}{15}.$$

Esempio 1.4. Calcolare il volume della sfera di raggio R. Dovendo calcolare il volume possiamo scegliere a pia

cimento il sistema di riferimento cartesiano. Poniamo l'origine del sistema nel centro della sfera, di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Vista la simmetria è sufficiente calcolare

$$2 \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dxdy,$$

dove D è dato da

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\right\}.$$

Allora abbiamo

$$2 \int_{x=-R}^{R} \left(\int_{y=-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dy \right) dx.$$

Per il calcolo dell'integrale più interno, raccogliendo $\sqrt{R^2 - x^2}$ otteniamo

$$2 \int_{x=-R}^{R} \left(\int_{y=-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{1 - \frac{y^2}{R^2 - x^2}}\, dy \right) dx;$$

ponendo ora $y = \sqrt{R^2 - x^2} \sin t$ da cui $dy = \sqrt{R^2 - x^2} \cos t\, dt$ con $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, l'integrale diventa

$$\begin{aligned}
2 \int_{x=-R}^{R} \left(\int_{t=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot \sqrt{R^2 - x^2} \cos t\, dt \right) dx &= 2 \int_{x=-R}^{R} (R^2 - x^2) \left(\int_{t=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt \right) dx \\
= 2 \int_{x=-R}^{R} (R^2 - x^2) \left[\frac{1}{2}(t + \sin t \cos t) \right]_{t=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx &= \pi \int_{x=-R}^{R} (R^2 - x^2)\, dx = \pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{x=-R}^{R} \\
= \pi \left[R^3 - \frac{R^3}{3} + R^3 - \frac{R^3}{3} \right]_{x=-R}^{R} &= \frac{4\pi R^3}{3}.
\end{aligned}$$

Enunciamo le proprietà dell'integrale doppio analoghe a quelle dell'integrale di una variabile. Siano $D \subset \mathbb{R}^2$ un insieme limitato e misurabile, f e g integrabili su D e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Allora valgono le seguenti proprietà.

1. Linearità

$$\iint_D \left[\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)\right] dxdy = \alpha \iint_D f(x, y)\, dxdy + \beta \iint_D g(x, y)\, dxdy.$$

2. Monotonia rispetto alla funzione integranda

$$\text{se} \quad f \geq 0 \quad \text{in} \quad D \quad \Rightarrow \quad \iint_D f(x, y)\, dxdy \geq 0$$

$$\text{se} \quad f \geq g \quad \text{in} \quad D \quad \Rightarrow \quad \iint_D f(x, y)\, dxdy \geq \iint_D g(x, y)\, dxdy.$$

3. Maggiorazione dell'integrale

$$\left| \iint_D f(x, y)\, dxdy \right| \leq \iint_D |f(x, y)|\, dxdy \leq M|D|,$$

dove M è una costante tale che $|f(x, y)| \leq M$ per ogni $(x, y) \in D$.

4. Additività rispetto al dominio

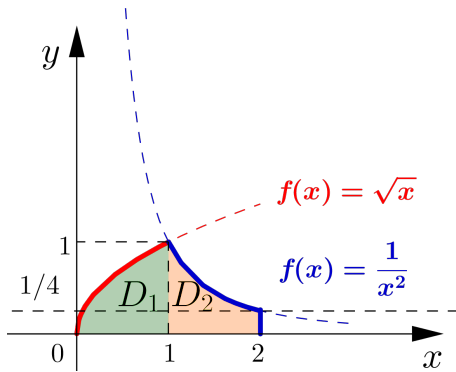
Se D_1 e D_2 sono domini tali che $|D_1 \cap D_2| = 0$, ossia se l'intersezione dei due domini ha misura nulla, e se f è integrabile in $D_1 \cup D_2$, allora

$$\iint_{D_1 \cup D_2} f(x,y)\,dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy.$$

Definiamo il valore medio di una funzione $f : D \to \mathbb{R}$ su D (di misura non nulla) come

$$\bar{f}_D := \frac{1}{|D|} \iint_D f(x,y)\,dxdy.$$

Esempio 1.5. Calcoliamo il valore medio della funzione $f(x,y) = y(1-2x)$ sull'insieme D definito da

$$D = D_1 \cup D_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \sqrt{x}\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1/x^2\right\}.$$

Gli insiemi D_1 e D_2 sono limitati e misurabili e la funzione f è continua, quindi integrabile, così l'integrale è ben definito. Si tratta di calcolare

$$\frac{1}{|D|}\iint_D y(1-2x)\,dxdy = \frac{1}{|D_1 \cup D_2|}\iint_{D_1 \cup D_2} y(1-2x)\,dxdy$$

$$= \frac{1}{|D_1 \cup D_2|}\left(\iint_{D_1} y(1-2x)\,dxdy + \iint_{D_2} y(1-2x)\,dxdy\right).$$

I domini sono semplici rispetto ad entrambi gli assi. Procediamo in entrambi i modi. Consideriamo D_1 semplice rispetto all'asse y:

$$\iint_{D_1} y(1-2x)\,dxdy = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{\sqrt{x}} y(1-2x)\,dxdy = \int_{x=0}^{1}(1-2x)\left(\int_{y=0}^{\sqrt{x}} y\ dy\right) dx = \int_{x=0}^{1}(1-2x)\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{\sqrt{x}} dx$$

$$= \int_{x=0}^{1}\frac{x(1-2x)}{2}\ dx = \frac{1}{2}\int_{x=0}^{1}(x-2x^2)\ dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{12}.$$

Consideriamo D_1 semplice rispetto all'asse x:

$$\iint_{D_1} y(1-2x)\,dxdy = \int_{y=0}^{1}\int_{x=y^2}^{0} y(1-2x)\,dxdy = \int_{y=0}^{1} y\left(\int_{x=y^2}^{0}(1-2x)\ dx\right) dy = \int_{y=0}^{1} y\left[x-x^2\right]_{x=y^2}^{0}\ dy$$

$$= \int_{y=0}^{1}(y^5-y^3)\ dy = \left[\frac{y^6}{6}-\frac{y^4}{4}\right]_0^1 = \left(\frac{1}{6}-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{12}.$$

Consideriamo D_2 semplice rispetto all'asse y:

$$\iint_{D_2} y(1-2x)\,dxdy = \int_{x=1}^{2}\int_{y=0}^{\frac{1}{x^2}} y(1-2x)\,dxdy = \int_{x=1}^{2}(1-2x)\left(\int_{y=0}^{\frac{1}{x^2}} y\ dy\right) dx = \int_{x=1}^{2}(1-2x)\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{\frac{1}{x^2}} dx$$

$$= \int_{x=1}^{2}\frac{1-2x}{2x^4}\ dx = \frac{1}{2}\int_{x=1}^{2}\left(\frac{1}{x^4}-\frac{2}{x^3}\right) dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{x^2}\right]_1^2 = -\frac{11}{48}.$$

Consideriamo D_2 semplice rispetto all'asse y. Suddividendolo opportunamente abbiamo

$$\iint_{D_2} y(1-2x)\,dxdy = \int_{y=0}^{\frac{1}{4}}\int_{x=1}^{2} y(1-2x)\,dxdy + \int_{y=\frac{1}{4}}^{1}\int_{x=1}^{\frac{1}{\sqrt{y}}} y(1-2x)\,dxdy$$

$$= \int_{y=0}^{\frac{1}{4}} y\ dy\int_{x=1}^{2}(1-2x)\ dx + \int_{y=\frac{1}{4}}^{1} y\left(\int_{x=1}^{\frac{1}{\sqrt{y}}}(1-2x)\ dx\right) dy$$

$$= \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{4}}\left[x-x^2\right]_1^2 + \int_{y=\frac{1}{4}}^{1} y\left[x-x^2\right]_{x=1}^{\frac{1}{\sqrt{y}}}\ dy = -\frac{1}{16} + \int_{y=\frac{1}{4}}^{1}(\sqrt{y}-1)\ dy = -\frac{1}{16} + \left[\frac{2y^{3/2}}{3} - y\right]_{y=\frac{1}{4}}^{1}$$

$$= -\frac{1}{16} + \left(\frac{2}{3} - 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = -\frac{11}{48}.$$

Per il calcolo della misura di $D = D_1 \cup D_2$ abbiamo

$$|D| = |D_1 \cup D_2| = \int_0^1 \sqrt{x}\, dx + \int_1^2 \frac{1}{x^2}\, dx = \left[\frac{2x^{3/2}}{3}\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = \frac{7}{6}.$$

Pertanto il valore medio è uguale a

$$\bar{f}_D = \frac{6}{7}\left(-\frac{1}{12} - \frac{11}{48}\right) = -\frac{15}{56}.$$

1.4 Cambiamento di variabili

Negli integrali doppi può capitare che le variabili "originali" (x, y) rendano il calcolo piuttosto complicato e ci sia l'esigenza di effettuare un cambiamento di variabili in un nuovo sistema di coordinate (u, v). Una trasformazione di coordinate è un particolare esempio di funzione

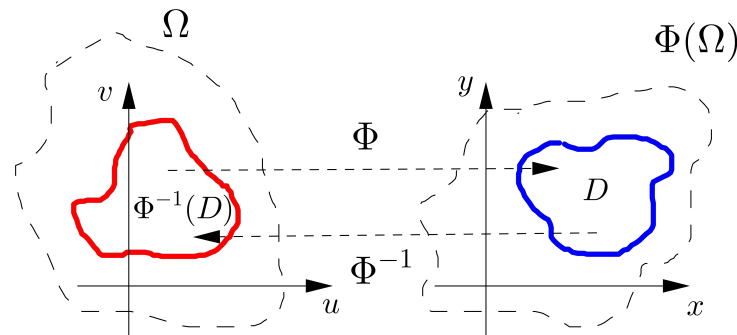
$$\vec{\mathbf{F}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

dove lo spazio di partenza e lo spazio d'arrivo hanno la stessa dimensione. Gli esempi tipici che prenderemo in considerazione sono in $\mathbb{R}^2$ e in $\mathbb{R}^3$,

$$\begin{array}{ll} \vec{\mathbf{F}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 & \vec{\mathbf{F}} : \ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \mapsto (f_1(x, y), f_2(x, y)) & (x, y, z) \mapsto (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z))\,. \end{array}$$

Sia Ω un insieme aperto di $\mathbb{R}^2$ e indichiamo con $\Phi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una funzione che realizza il cambiamento di coordinate, ossia esplicitamente

$$\begin{array}{l} \Phi : \Omega \to \mathbb{R}^2 \\ (u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v))\,, \qquad u, v \in \Omega; \end{array}$$

Supponiamo che Φ sia biunivoca tra Ω e $\Phi(\Omega)$ e che le sue componenti $x(u, v), y(u, v) \in C^1(\Omega)$, ovvero siano continue con derivate parziali continue in Ω.

Introduciamo inoltre la matrice jacobiana di Φ che ha per righe i gradienti delle componenti $x(u, v)$, $y(u, v)$ di Φ,

$$J_{\Phi(u,v)} = \begin{pmatrix} \nabla x(u, v) \\ \nabla y(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix},$$

e indichiamo il suo determinante con

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det\left(J_{\Phi(u,v)}\right).$$

Supponiamo che $\det\left(J_{\Phi(u,v)}\right) \neq 0$ per ogni funzione $(u, v) \in \Omega$, allora vale il seguente risultato di cui omettiamo la dimostrazione.

Teorema 1.5 (Cambiamento di variabili)

Se D è misurabile e f è integrabile su D allora

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{\Phi^{-1}(D)} f\left(x(u,v),y(u,v)\right)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\,dudv \tag{1.3}$$

E' utile osservare che il suddetto teorema è l'analogo dell'integrazione per sostituzione vista per le funzioni in una variabile,

$$\int_a^b f(x)\,dx \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt.$$

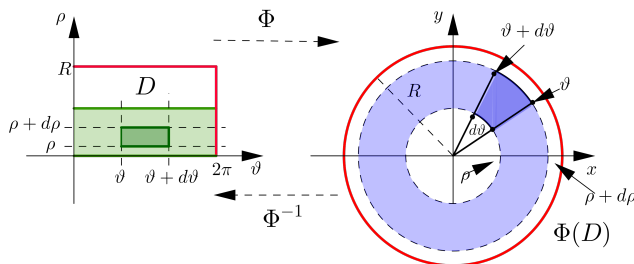
Coordinate polari nel piano

Un caso particolarmente importante di trasformazione di coordinate è quello delle *coordinate polari*, ossia la trasformazione del tipo

$$\Phi(\rho,\vartheta):\begin{cases} x(\rho,\vartheta)=\rho\cos\vartheta \\ y(\rho,\vartheta)=\rho\sin\vartheta \end{cases} \qquad \text{con} \qquad \left|\det\left(J_{\Phi(\rho,\vartheta)}\right)\right|=\rho.$$

Infatti, calcolando il modulo del determinante della matrice jacobiana si ha

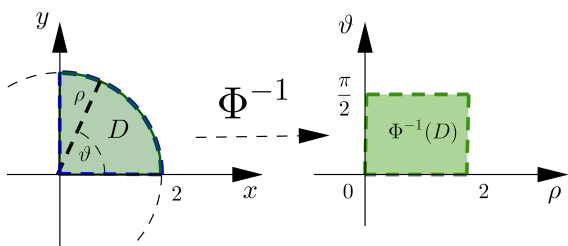
$$\left|\det\left(J_{\Phi(\rho,\vartheta)}\right)\right| = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\cos\vartheta) & \frac{\partial}{\partial\vartheta}(\rho\cos\vartheta) \\ \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\sin\vartheta) & \frac{\partial}{\partial\vartheta}(\rho\sin\vartheta)\end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix}\cos\vartheta & -\rho\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \rho\cos\vartheta\end{pmatrix}\right|$$
$$= \left|\rho\cos^2\vartheta+\rho\sin^2\vartheta\right| = |\rho| = \rho.$$

La formula del fattore di trasformazione d'area $\rho\; d\rho d\vartheta$ può anche essere giustificata intuitivamente nel seguente modo. Consideriamo un rettangolo nel piano ρ,ϑ di lati R e 2π e un rettangolino infinitesimo di vertici $\rho,\rho+d\rho,\vartheta,\vartheta+d\vartheta$, la cui area è evidentemente $d\rho d\vartheta$. Tale rettangolino si trasforma nel piano xy nel settore di corona circolare di area $\rho d\rho d\vartheta$. L'area di tale settore, evidenziato in figura, è data dalla differenza tra l'area dell'arco individuato dalla circonferenza più esterna e l'area dall'arco individuato dalla circonferenza interna che per la geometria elementare è dato da raggio al quadrato per l'ampiezza dell'angolo diviso 2, ossia

$$\frac{(\rho+d\rho)^2\cdot d\vartheta}{2}-\frac{\rho^2\cdot d\vartheta}{2}=\frac{\rho^2 d\vartheta+d\rho^2 d\vartheta+2\rho d\rho d\vartheta}{2}-\frac{\rho^2\cdot d\vartheta}{2}=\rho d\rho d\vartheta+\frac{d\rho^2 d\vartheta}{2}\sim\rho d\rho d\vartheta.$$

Si noti che il termine $d\rho^2 d\vartheta$ può essere trascurato in quanto prodotto di tre infinitesimi, e quindi di ordine superiore a $\rho d\rho d\vartheta$ che è un prodotto di due infinitesimi.

Questo cambio di variabili è utile al calcolo in molti casi in cui il dominio D ha qualche simmetria di tipo circolare, per cui si esprime facilmente in coordinate polari. In generale, come vedremo negli esempi, il cambio di variabile più opportuno è suggerito sia dal tipo di funzione che si integra che dalla forma del dominio di integrazione.

Esempio 1.6. Calcoliamo il seguente integrale doppio:

$$\iint_D \frac{xy^2}{x^2+y^2}, \quad \text{dove} \quad D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 4,\ x > 0,\ y > 0\}.$$

Prima di tutto osserviamo che la funzione integranda è definita e prolungabile per continuità nell'origine. Quindi è integrabile sul dominio limitato D. Passiamo in coordinate polari, cioè utilizziamo la trasformazione

$$\Phi(\rho,\vartheta) := \begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \end{cases}, \ \rho \geq 0,\ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi$$

$$\text{con} \quad \left|\det\left(J_{\Phi(\rho,\vartheta)}\right)\right| = \rho.$$

Allora invece di integrare la funzione f assegnata sull'insieme D, integreremo la funzione

$$f(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta) = \rho\cos\vartheta\sin^2\vartheta, \ \text{sull'insieme}\ D' = \Phi^{-1}(D) := \{(\rho,\vartheta) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \rho < 2, 0 < \vartheta < \pi/2\}.$$

Infatti per trovare le limitazioni da porre alle variabili ρ e ϑ, sostituendo $x = \rho\cos\vartheta$ e $y = \rho\sin\vartheta$ nelle disuguaglianze che definiscono l'insieme D si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \rho^2\cos^\vartheta + \rho^2\sin^2\vartheta < 4 \\ \rho\cos\vartheta > 0 \\ \rho\sin\vartheta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^2 < 4 \\ \cos\vartheta > 0 \\ \sin\vartheta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \rho < 2 \\ 0 < \vartheta < \pi/2 \\ 0 < \vartheta < \pi \end{cases} \Rightarrow 0 < \rho < 2, \quad 0 < \vartheta < \pi/2.$$

Ricordando il fattore jacobiano di trasformazione, l'integrale diventa

$$\iint_D \frac{xy^2}{x^2+y^2} = \iint_{\Phi^{-1}(D)} \left(\rho\cos\vartheta\sin^2\vartheta\right)\rho d\rho d\vartheta = \int_{\rho=0}^{2}\int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} \rho^2\cos\vartheta\sin^2\vartheta\ d\rho d\vartheta = \int_{\rho=0}^{2}\rho^2\ d\rho \int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}}\cos\vartheta\sin^2\vartheta\ d\vartheta$$

$$= \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^2 \int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\vartheta\ d(-\sin\vartheta) = \frac{8}{3}\left[\frac{\sin^3\vartheta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{8}{9}.$$

In generale, se il dominio D è definito da una generica circonferenza con centro nel punto (x_0, y_0) e raggio R di equazione

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2,$$

la trasformazione in coordinate polari con centro (x_0, y_0) si presenta nella forma

$$\Phi(\rho,\vartheta) : \begin{cases} x = x_0 + \rho\cos\vartheta \\ y = y_0 + \rho\sin\vartheta \end{cases}, \quad \text{con} \quad \left|\det\left(J_{\Phi(\rho,\vartheta)}\right)\right| = \rho.$$

Esempio 1.7. Consideriamo il cerchio D di centro $(R, 0)$ e raggio R, con $R > 0$, ossia l'insieme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-R)^2 + y^2 \leq R^2\},$$

e calcoliamo gli integrali sull'insieme D delle funzioni $f_1(x,y)$ e $f_2(x,y)$ definite da

$$f_1(x,y) = (x^2+y^2), \qquad f_2(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Possiamo considerare due metodi di calcolo basati su due diversi cambiamenti di coordinate. Il primo metodo, come vedremo utile per il primo integrale ma non per il secondo, utilizza la trasformazione

$$\Phi(\rho,\vartheta) : \begin{cases} x = R + \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \end{cases} \quad \left|\det\left(J_{\Phi(\rho,\vartheta)}\right)\right| = \rho,$$

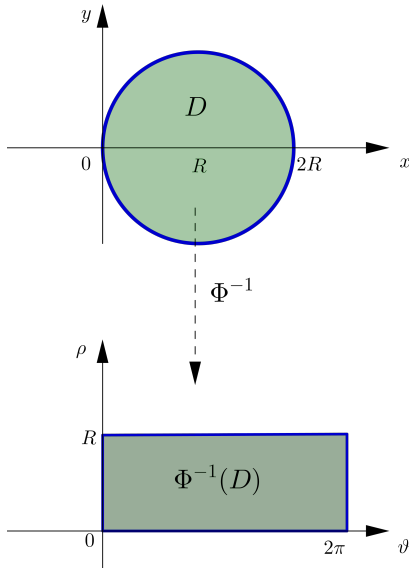
in modo tale che l'insieme D si trasformi nell'insieme $\Phi^{-1}(D)$ definito da

$$\Phi^{-1}(D) = \{(\rho,\vartheta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \rho \leq R,\ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi\}.$$

Così invece di integrare le funzioni assegnate, integreremo le funzioni

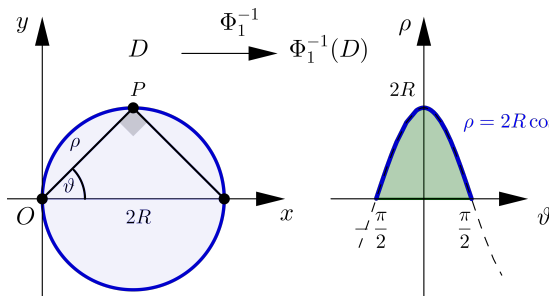
$$f_1(\rho,\vartheta) = (R+\rho\cos\vartheta)^2 + \rho^2\sin^2\vartheta = R^2 + 2R\rho\cos\vartheta + \rho^2$$
$$f_2(\rho,\vartheta) = \sqrt{(R+\rho\cos\vartheta)^2 + \rho^2\sin^2\vartheta} = \sqrt{R^2 + 2R\rho\cos\vartheta + \rho^2}.$$

Per la funzione f_1, ricordando il fattore jacobiano di trasformazione, abbiamo che

$$\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy = \iint_{\Phi^{-1}(D)} \left(R^2 + 2R\rho\cos\vartheta + \rho^2\right)\rho\ d\rho d\vartheta$$
$$= \int_{\rho=0}^{R}\int_{\vartheta=0}^{2\pi} \left(\rho R^2 + 2R\rho^2\cos\vartheta + \rho^3\right)\ d\rho d\vartheta$$
$$= R^2\int_{\rho=0}^{R}\int_{\vartheta=0}^{2\pi} \rho\ d\rho d\vartheta + 2R\int_{\rho=0}^{R}\int_{\vartheta=0}^{2\pi} \rho^2\cos\vartheta\ d\rho d\vartheta + \int_{\rho=0}^{R}\int_{\vartheta=0}^{2\pi} \rho^3\ d\rho d\vartheta$$
$$= 2\pi R^2\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_{\rho=0}^{R} + 2R\int_{\rho=0}^{R}\rho^2\ d\rho\int_{\vartheta=0}^{2\pi}\cos\vartheta\ d\vartheta + 2\pi\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_{\rho=0}^{R}$$
$$= 2\pi R^2\cdot\frac{R^2}{2} + 2R\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^R [\sin\vartheta]_0^{2\pi} + 2\pi\cdot\frac{R^4}{4}$$
$$= \pi R^4 + 0 + \frac{\pi R^4}{2} = \frac{3\pi R^4}{2}.$$

Per la funzione f_2 si vede che non è opportuno il cambio di variabili dato dalla trasformazione Φ poiché la presenza della radice quadrata, rende l'integrale complicato. Utilizziamo in alternativa la trasformazione Φ_1 in coordinate polari con centro nell'origine, ossia

$$\Phi_1(\rho,\vartheta) : \begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \end{cases} \qquad \left|\det\left(J_{\Phi(\rho,\vartheta)}\right)\right| = \rho.$$

La funzione da integrare diventa $f_2(\rho,\vartheta) = \rho$, mentre, con riferimento al triangolo rettangolo in P in figura, la lunghezza del cateto OP è uguale a $\rho = 2R\cos\vartheta$, con l'angolo ϑ che varia tra $-\pi/2$ e $\pi/2$. In alternativa, invece di ragionare sul triangolo rettangolo, si può semplicemente sostituire $x = \rho\cos\vartheta$ e $y = \rho\sin\vartheta$ nell'equazione della circonferenza che definisce il dominio D ed osservare che $x \geq 0$, ottenendo così il sistema

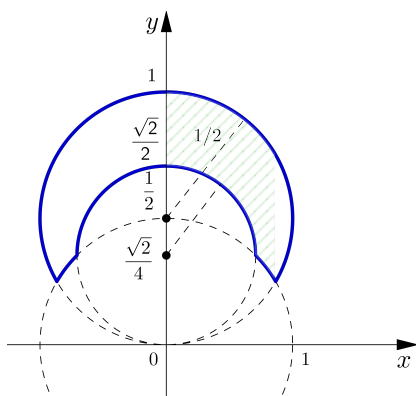
$$\begin{cases} (\rho\cos\vartheta - R)^2 + \rho^2\sin^2\vartheta \leq R^2 \\ \rho\cos\vartheta \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^2\cos^2\vartheta + \rho^2\sin^2\vartheta - 2\rho\cos\vartheta + R^2 \leq R^2 \\ \cos\vartheta \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq \rho < 2R\cos\vartheta \\ -\pi/2 \leq \vartheta \leq \pi/2 \end{cases}.$$

In ogni modo il dominio D si trasforma nel dominio equivalente $\Phi_1^{-1}(D)$ definito da

$$\Phi_1^{-1}(D) = \left\{(\rho,\vartheta) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}\ ,\ 0 \leq \rho \leq 2R\cos\vartheta\right\},$$

che è un domino semplice rispetto all'asse y nel piano ρ,ϑ, e quindi l'integrale della funzione f_2, ricordando il fattore jacobiano di trasformazione, diventa

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\ dxdy = \iint_{\Phi_1^{-1}(D)} \rho\cdot\rho\ d\rho d\vartheta = \int_{\vartheta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\rho=0}^{2R\cos\vartheta} \rho^2\ d\rho d\vartheta = \int_{\vartheta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{2R\cos\vartheta} d\vartheta = \frac{8R^3}{3}\int_{\vartheta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\vartheta\ d\vartheta$$
$$= \frac{8R^3}{3}\int_{\vartheta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\vartheta\left(1-\sin^2\vartheta\right)\ d\vartheta = \frac{8R^3}{3}\int_{\vartheta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2\vartheta\right)\ d(\sin\vartheta) = \frac{8R^3}{3}\left[\sin\vartheta - \frac{\sin^3\vartheta}{3}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{32R^3}{9}.$$

Esempio 1.8. Calcolare l'integrale $\displaystyle\iint_D \frac{|x|e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}\ dxdy$, dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \geq 1/4,\ x^2 + (y-1/2)^2 \leq 1/4,\ x^2 + (y-\sqrt{2}/4)^2 \geq 1/8\}.$$

L'insieme D, rappresentato in figura, è compatto e misurabile in quanto la sua frontiera ha misura nulla (unione di funzioni continue). La funzione integranda, definita continua in D, è integrabile, pertanto l'integrale è ben definito. Si noti che sia la funzione f che l'insieme D sono simmetrici rispetto all'asse y, pertanto è sufficiente calcolare due volte l'integrale sul dominio D^+. Conviene passare in coordinate polari usando una trasformazione Φ data da

$$\Phi(\rho, \vartheta) : \begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \end{cases} , \left|\det\left(J_{\Phi(\rho,\vartheta)}\right)\right| = \rho.$$

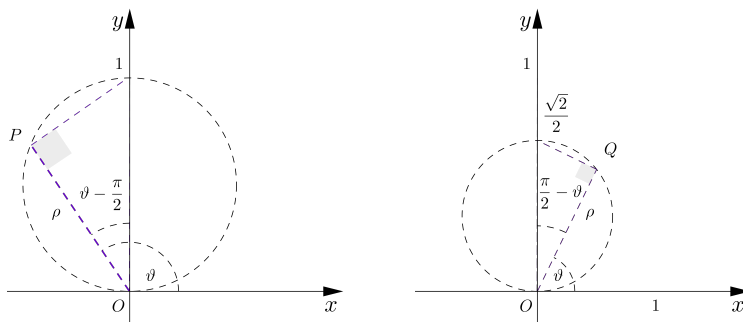
Allora la funzione integranda diviene

$$f(\rho, \vartheta) = \frac{\cos \vartheta e^{\rho}}{\rho}.$$

Si tratta ora di capire come cambia il dominio in base alla trasformazione usata. Intanto osserviamo che la circonferenza con centro l'origine e raggio $1/2$ si trasforma in $\rho = 1/2$,

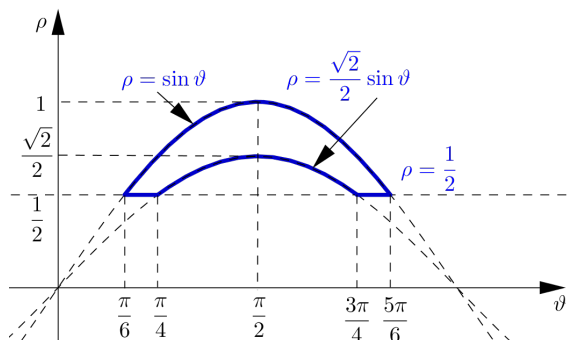
$$x^2 + y^2 \geq 1/4 \quad \Leftrightarrow \quad \rho^2 \cos^2 \vartheta + \rho^2 \sin^2 \vartheta \leq 1/4 \quad \Leftrightarrow \quad \rho^2 \leq 1/4 \quad \Leftrightarrow \quad \rho \leq 1/2.$$

Per le altre due circonferenze, sempre per le relazioni trigonometriche, si ottiene rispettivamente

$$\rho = \cos\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right) = \sin \vartheta, \qquad \rho = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \vartheta.$$

Per determinare ora le variazioni dell'angolo ϑ, cominciamo a rappresentare nel piano ρ, ϑ le tre circonferenze, ovvero le tre funzioni $\rho = 1/2$, $\rho = \sin \vartheta$ e $\rho = \sqrt{2}/2 \sin \vartheta$. Esse si intersecano nei punti

$$\frac{1}{2} = \sin \vartheta \quad \Leftrightarrow \quad \vartheta = \frac{\pi}{6}, \vartheta = \frac{5\pi}{6}$$
$$\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \vartheta \Leftrightarrow \quad \vartheta = \frac{\pi}{4}, \vartheta = \frac{3\pi}{4};$$

allora il dominio $\Phi^{-1}(D)$ è

$$\Phi^{-1}(D) = \{(\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : \rho \geq 1/2, \ \sqrt{2}/2 \sin \vartheta \leq \rho \leq \sin \vartheta\}.$$

Si può notare che sia l'insieme $\Phi^{-1}(D)$ che la funzione $\cos \vartheta e^{\rho}/\rho$ sono simmetrici rispetto alla retta $\vartheta = \pi/2$. Quindi è sufficiente calcolare due volte l'integrale di f su $\Phi^{-1}(D^+) = \Phi^{-1}(D) \cap [\pi/6; \pi/2]$. Considerando il

dominio semplice rispetto all'asse ρ e suddividendolo opportunamente si ottiene,

$$\iint_D \frac{|x|e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}\,dxdy = 2\iint_{\Phi^{-1}(D^+)} \cos\vartheta e^{\rho}\,d\rho d\vartheta = 2\int_{\vartheta=\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{\rho=\frac{1}{2}}^{\sin\vartheta} \cos\vartheta e^{\rho}\,d\rho d\vartheta + 2\int_{\vartheta=\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\rho=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\vartheta}^{\sin\vartheta} \cos\vartheta e^{\rho}\,d\rho d\vartheta$$

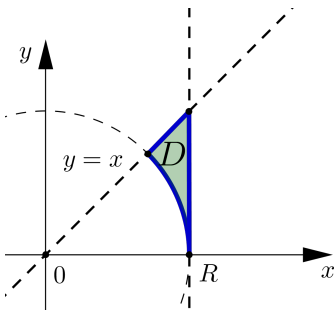
$$= 2\int_{\vartheta=\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos\vartheta\,[e^{\rho}]_{\frac{1}{2}}^{\sin\vartheta}\,d\vartheta + 2\int_{\vartheta=\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta\,[e^{\rho}]_{\rho=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\vartheta}^{\sin\vartheta}\,d\vartheta$$

$$= 2\int_{\vartheta=\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos\vartheta e^{\sin\vartheta} - \sqrt{e}\cos\vartheta)\,d\vartheta + 2\int_{\vartheta=\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\vartheta e^{\sin\vartheta} - \cos\vartheta e^{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\vartheta})\,d\vartheta$$

$$= 2\int_{\vartheta=\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} e^{\sin\vartheta}\,d(\sin\vartheta) - 2\sqrt{e}\int_{\vartheta=\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos\vartheta\,d\vartheta + 2\int_{\vartheta=\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin\vartheta}\,d(\sin\vartheta) - \frac{4}{\sqrt{2}}\int_{\vartheta=\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\vartheta}\,d\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\vartheta\right)$$

$$= 2\left[e^{\sin\vartheta}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} - 2\sqrt{e}\,[\sin\vartheta]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} + 2\left[e^{\sin\vartheta}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{4}{\sqrt{2}}\left[e^{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\vartheta}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 2e + e^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{2}-1\right) - 2\sqrt{2}e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

Esempio 1.9. Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D \frac{x}{x^2+y^2}\,dxdy, \qquad D := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y \le x \le R,\ x^2+y^2 \ge R^2\}.$$

La funzione f è continua in D, insieme compatto e misurabile, e pertanto è integrabile. Per il calcolo possiamo utilizzare le coordinate polari centrate nell'origine, ossia la trasformazione

$$\Phi(\rho,\vartheta) : \begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \end{cases}, \left|\det\left(J_{\Phi(\rho,\vartheta)}\right)\right| = \rho.$$

In questo modo, invece che integrare la funzione f sull'insieme D, integriamo la funzione $f(\rho,\vartheta) = \cos\vartheta/\rho$ sull'insieme

$$\Phi^{-1}(D) := \left\{(\rho,\vartheta)\in\mathbb{R}^2 : 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{4},\ R \le \rho \le \frac{R}{\cos\vartheta}\right\}.$$

Infatti, sostituendo $x = \rho\cos\vartheta, y = \rho\sin\vartheta$ nella definizione di D otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \rho\sin\vartheta \le \rho\cos\vartheta \\ \rho\cos\vartheta \le R \\ \rho^2 \ge R^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\vartheta \le \cos\vartheta \\ \rho \le R/\cos\vartheta \\ \rho \ge R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le \vartheta \le \pi/4 \\ \rho \le R/\cos\vartheta \\ \rho \ge R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le \vartheta \le \pi/4 \\ R \le \rho \le R/\cos\vartheta \end{cases}.$$

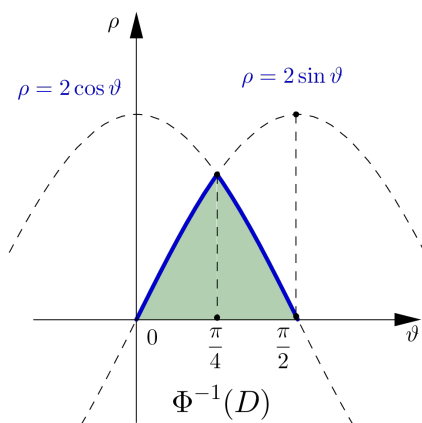
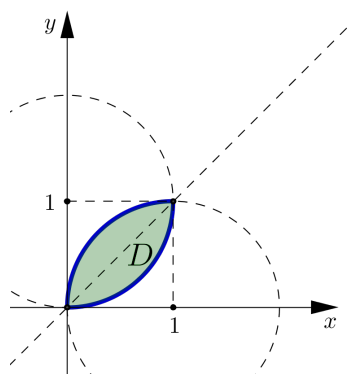
Ricordando il fattore jacobiano della trasformazione, l'integrale diventa,

$$\iint_D \frac{x}{x^2+y^2}\,dxdy = \iint_{\Phi^{-1}(D)} \frac{\cos\vartheta}{\rho}\cdot\rho\,d\rho d\vartheta = \int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{4}}\int_{\rho=R}^{\frac{R}{\cos\vartheta}} \cos\vartheta\,d\rho d\vartheta = \int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{4}} \cos\vartheta\left(\int_{\rho=R}^{\frac{R}{\cos\vartheta}} d\rho\right)d\vartheta$$

$$= \int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{4}} \cos\vartheta\,[\rho]_R^{\frac{R}{\cos\vartheta}}\,d\vartheta = \int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{4}} \cos\vartheta\left(\frac{R}{\cos\vartheta} - R\right)d\vartheta = R\int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{4}} d\vartheta - R\int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{4}} \cos\vartheta\,d\vartheta$$

$$= R\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Esempio 1.10. Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy, \qquad D := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-1)^2+y^2 \le 1,\ x^2+(y-1)^2 \le 1\}.$$

Per il calcolo possiamo utilizzare le coordinate polari centrate nell'origine, ossia la trasformazione

$$\Phi(\rho,\vartheta):\begin{cases} x=\rho\cos\vartheta \\ y=\rho\sin\vartheta \end{cases},\ \left|\det\left(J_{\Phi(\rho,\vartheta)}\right)\right|=\rho.$$

Quindi invece di integrare la funzione f sull'insieme D, integriamo la funzione $f(\rho,\vartheta)=\rho$ sull'insieme

$$\Phi^{-1}(D):=\left\{(\rho,\vartheta)\in\mathbb{R}^2: 0\le\vartheta\le\pi/2,\ 0\le\rho\le\min\{2\cos\vartheta;2\sin\vartheta\}\right\}.$$

Infatti, sostituendo $x=\rho\cos\vartheta, y=\rho\sin\vartheta$ nella definizione di D otteniamo il sistema

$$\begin{cases} (\rho\cos\vartheta-1)^2+\rho^2\sin^2\vartheta\le 1 \\ \rho^2\cos^2\vartheta+(\rho\sin\vartheta-1)^2\le 1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \rho^2-2\rho\cos\vartheta\le 0 \\ \rho^2-2\rho\sin\vartheta\le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} \rho\le 2\rho\cos\vartheta \\ \rho\le 2\rho\sin\vartheta \end{cases}.$$

A questo punto rappresentando nel piano ρ,ϑ le due funzioni del sistema $\rho=2\cos\vartheta, \rho=2\sin\vartheta$, si ottiene l'insieme $\Phi^{-1}(D)$, che suddividendolo opportunamente con la retta $\vartheta=\pi/4$, può essere considerato semplice rispetto all'asse ρ. Pertanto, ricordando il fattore jacobiano della trasformazione, l'integrale assegnato diventa

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$$

$$=\iint_{\Phi^{-1}(D)}\rho^2\,d\rho d\vartheta=\int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{4}}\int_{\rho=0}^{2\sin\vartheta}\rho^2\,d\rho d\vartheta+\int_{\vartheta=\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\rho=0}^{2\cos\vartheta}\rho^2\,d\rho d\vartheta$$

$$\int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{2\sin\vartheta}d\vartheta+\int_{\vartheta=\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{2\cos\vartheta}d\vartheta=\frac{8}{3}\int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{4}}\sin^3\vartheta\,d\vartheta+\frac{8}{3}\int_{\vartheta=\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\vartheta\,d\vartheta$$

$$=\frac{8}{3}\int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos^2\vartheta)\,d(-\cos\vartheta)+\frac{8}{3}\int_{\vartheta=\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\vartheta)\,d(\sin\vartheta)=-\frac{8}{3}\left[\cos\vartheta-\frac{\cos^3\vartheta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{8}{3}\left[\sin\vartheta-\frac{\sin^3\vartheta}{3}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

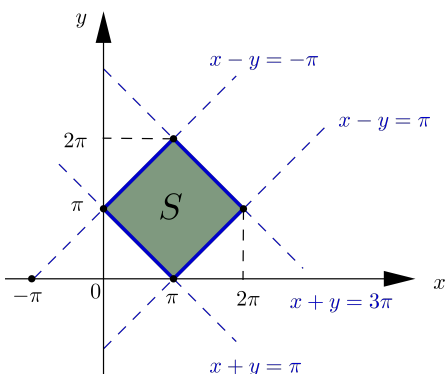
$$=-\frac{8}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{12}-\frac{2}{3}\right)+\frac{8}{3}\left(\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{12}\right)=\frac{4}{9}\left(8-5\sqrt{2}\right).$$

Altri cambiamenti di variabile

In generale il cambiamento di variabili da utilizzare nel calcolo degli integrali multipli è suggerito dalla definizione della funzione e del dominio di integrazione. Per illustrare la tecnica utilizziamo alcuni esempi.

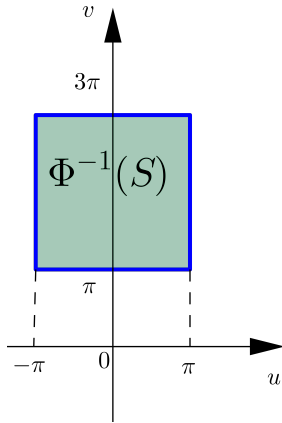
Esempio 1.11. Calcolare

$$\iint_S (x-y)^2\sin^2(x+y)\,dxdy,$$

dove S è il parallelogramma di vertici $(0,\pi)$, $(\pi,0)$, $(\pi,2\pi)$, $(2\pi,\pi)$.

L'insieme S rappresentato, in figura, risulta compatto e misurabile poiché la sua frontiera ha misura nulla (unione di funzioni continue). La funzione f è continua su S, pertanto è integrabile. Sebbene l'insieme S risulti normale rispetto ad entrambi gli assi, è abbastanza evidente che l'utilizzo delle coordinate cartesiane non porta a calcoli agevoli. Si tratta di intuire quale può essere un cambiamento di variabile che consenta di semplificare i calcoli. Si può osservare che

$$S=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2: -\pi\le x-y\le\pi,\ \pi\le x+y\le 3\pi\}$$

.

Allora consideriamo la trasformazione lineare

$$\Phi(u,v) = \begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x = (v+u)/2 \\ y = (v-u)/2 \end{cases}.$$

Così invece di integrare la funzione $f(x,y)$ sull'insieme S, integriamo la funzione $f(u,v) := u^2 \sin^2 v$ sull'insieme

$$\Phi^{-1}(S) := \{(u;v) \in \mathbb{R}^2 : -\pi \le u \le \pi,\ \pi \le v \le 3\pi\}.$$

Si tratta ora di calcolare il determinate della matrice jacobiana della trasformazione. Possiamo procedere in due modi. Dal sistema, esplicitando x e y in funzione di u e v, si ha

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{v+u}{2}\right) & \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{v+u}{2}\right) \\ \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{v-u}{2}\right) & \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{v-u}{2}\right) \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}.$$

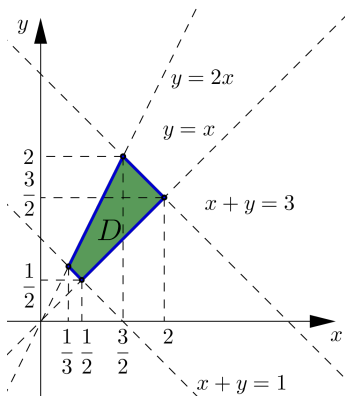
In alternativa, ricordando che per una matrice M quadrata invertibile si ha che $\det M = 1/\det(M^{-1})$ dove M^{-1} è la matrice inversa di M, abbiamo che

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|^{-1} = \left|\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}\right|^{-1} = \left|\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(x-y) & \frac{\partial}{\partial y}(x-y) \\ \frac{\partial}{\partial x}(x+y) & \frac{\partial}{\partial y}(x+y) \end{pmatrix}\right|^{-1} = \left|\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right|^{-1} = |2|^{-1} = \frac{1}{2}.$$

In questo modo non è necessario ricavare x e y dal sistema. Allora il calcolo dell'integrale diventa

$$\iint_S (x-y)^2 \sin^2(x+y)\,dxdy = \iint_{\Phi^{-1}(S)} u^2 \sin^2 v \cdot \frac{1}{2} dudv = \frac{1}{2}\int_{u=-\pi}^{\pi}\int_{v=\pi}^{3\pi} u^2 \sin^2 v\ dudv$$

$$= \frac{1}{2}\int_{u=-\pi}^{\pi} u^2\ du \int_{v=\pi}^{3\pi} \sin^2 v\ dv = \frac{1}{2}\left[\frac{u^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2}(v - \sin v\cos v)\right]_{\pi}^{3\pi} = \frac{\pi^3}{3}\cdot\pi = \frac{\pi^4}{3}.$$

Esempio 1.12. Calcolare

$$\iint_D \frac{dxdy}{xy}, \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \le y \le 2x,\ 1 \le x+y \le 3\}.$$

L'insieme D risulta semplice rispetto ad entrambi gli assi, per cui si può procedere in coordinate cartesiane. Considerando D semplice rispetto all'asse y e suddividendolo opportunamente, si ha

$$\iint_D \frac{dxdy}{xy} = \int_{x=\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}\int_{y=1-x}^{2x} \frac{dxdy}{xy} + \int_{x=\frac{1}{2}}^{1}\int_{y=x}^{2x} \frac{dxdy}{xy} + \int_{x=1}^{\frac{3}{2}}\int_{y=x}^{3-x} \frac{dxdy}{xy}.$$

Già in questa fase è abbastanza evidente che l'utilizzo delle coordinate cartesiane porta a lunghi calcoli. Volendo continuare si ottiene,

$$\int_{x=\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x}\left[\ln|y|\right]_{y=1-x}^{2x} dx + \int_{x=\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x}\left[\ln|y|\right]_{y=x}^{2x} dx + \int_{x=1}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{x}\left[\ln|y|\right]_{y=x}^{3-x} dx$$

$$= \int_{x=\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(2x) - \ln(1-x)}{x}\ dx + \int_{x=\frac{1}{2}}^{1} \frac{\ln(2x) - \ln x}{x}\ dx + \int_{x=1}^{\frac{3}{2}} \frac{\ln(3-x) - \ln x}{x}\ dx$$

$$= \int_{x=\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\ln 2}{x} + \frac{\ln x}{x} - \frac{\ln(1-x)}{x}\right) dx + \int_{x=\frac{1}{2}}^{1} \frac{\ln 2}{x}\ dx + \int_{x=1}^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\ln(3-x)}{x} - \frac{\ln x}{x}\right) dx$$

$$= \left[\ln 2 \ln x + \ln^2 x\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} - \int_{x=\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-x)}{x}\ dx + \left[\ln 2 \ln x\right]_{\frac{1}{2}}^{1} + \int_{x=1}^{\frac{3}{2}} \frac{\ln(3-x)}{x}\ dx - \left[\ln^2 x\right]_1^{\frac{3}{2}}.$$

Notiamo che i due integrali rimasti non sono risolubili con metodi elementari. Possiamo però completare il calcolo osservando che

$$\int_{x=1}^{\frac{3}{2}} \frac{\ln(3-x)}{x}\,dx = \int_{x=1}^{\frac{3}{2}} \frac{\ln 3 + \ln(1-x/3)}{x}\,dx = \int_{t=1/3}^{\frac{1}{2}} \frac{ln3 + \ln(1-t)}{3t}\,dt = \int_{t=1/3}^{\frac{1}{2}} \frac{\ln 3}{3t}\,dt + \int_{t=1/3}^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-t)}{3t}\,dt.$$

Cerchiamo allora determinare un cambiamento di variabile che consenta di semplificare i calcoli. Osserviamo che nel nostro caso, x e y sono positivi e pertanto

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < 1 \le y/x \le 2,\ 1 \le x+y \le 3\}.$$

Allora conviene utilizzare la trasformazione

$$\Phi(u,v) = \begin{cases} u = y/x \\ v = x+y \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x = v/(u+1) \\ y = uv/(u+1) \end{cases},$$

così invece di integrare la funzione $f(x,y)$ sull'insieme D, integriamo la funzione $f(u,v) := (u+1)^2/uv^2$ sull'insieme

$$\Phi^{-1}(D) := \{(u;v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le u \le 2,\ 1 \le v \le 3\}.$$

Il determinante della matrice jacobiana della trasformazione è dato da

$$\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = \left|\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}\right|^{-1} = \left|\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x}(x+y) & \frac{\partial}{\partial y}(x+y) \end{pmatrix}\right|^{-1} = \left|\begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right|^{-1}$$
$$= \left|-\frac{y}{x^2} - \frac{1}{x}\right|^{-1} = \frac{x^2}{y+x}.$$

Allora il calcolo dell'integrale diventa

$$\iint_D \frac{dxdy}{xy} = \iint_{\Phi^{-1}(D)} \frac{(u+1)^2}{uv^2} \cdot \frac{\frac{v^2}{(u+1)^2}}{\frac{uv}{u+1} + \frac{v}{u+1}}\,dudv = \iint_{\Phi(D)} \frac{(u+1)^2}{uv^2} \cdot \frac{v}{(u+1)^2}\,dudv = \int_{u=1}^{2}\int_{v=1}^{3} \frac{dudv}{uv}$$
$$= \int_{u=1}^{2} \frac{du}{u} \int_{v=1}^{3} \frac{dv}{v} = \ln 2 \cdot \ln 3.$$

Esempio 1.13. Calcoliamo il volume della sfera, già calcolato nell'esempio 1.4, ma questa volta utilizzando le coordinate polari. Come nell'esempio 1.4 sarà sufficiente calcolare il doppio del volume della semisfera, ossia considerare l'integrale doppio della funzione

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

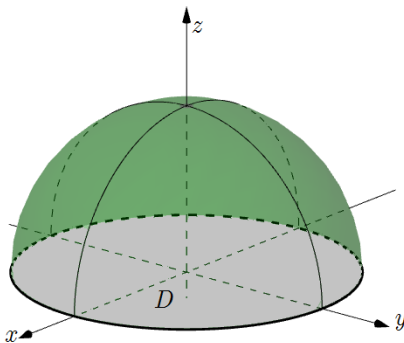
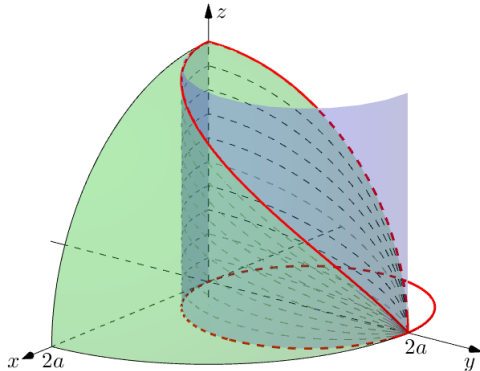
sull'insieme

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le R^2\}.$$

Quindi se

$$\Phi(\rho,\vartheta) : \begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \end{cases} \qquad |\det J_{\Phi(\rho,\vartheta)}| = \rho,$$

l'integrale diventa

$$V = 2\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dxdy = 2\iint_{\Phi^{-1}(D)} \rho\sqrt{R^2 - \rho^2}\,d\rho d\vartheta = 2\int_{\vartheta=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{R} \rho\sqrt{R^2 - \rho^2}\,d\rho d\vartheta$$
$$= 2\pi \int_{\rho=0}^{R} \sqrt{R^2 - \rho^2}\,d\left(\rho^2\right) = -2\pi \int_{\rho=0}^{R} \sqrt{R^2 - \rho^2}\,d\left(R^2 - \rho^2\right)$$
$$= -2\pi \left[\frac{2}{3}\left(R^2 - \rho^2\right)^{3/2}\right]_0^R = -\frac{4\pi}{3}\left[0 - R^3\right] = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Esempio 1.14. Calcolare il volume dell'intersezione del cilindro di equazione $x^2+y^2 \leq 2ay$ e della sfera di equazione $x^2+y^2+z^2 \leq 4a^2$. Prima di tutto si può osservare che per ragioni di simmetria, sarà sufficiente calcolare 4 volte il volume contenuto nel primo ottante, ossia per $x, y, z \geq 0$. Si tratta di capire che funzione integrare e su quale dominio. Da un grafico sommario dell'intersezione delle superfici, si può considerare come dominio d'integrazione la semicirconferenza individuata dal cilindro sul piano x, y ossia

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+(y-a)^2 \leq a^2,\ x \geq 0\},$$

mentre come funzione possiamo considerare la sfera di equazione

$$f(x,y) = \sqrt{4a-x^2-y^2}.$$

Quindi bisogna calcolare l'integrale

$$V = 4\iint_D \sqrt{4a-x^2-y^2}\,dxdy.$$

Conviene passare in coordinate polari centrate nell'origine, ossia utilizzare la trasformazione

$$\Phi(\rho,\vartheta) = \begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \end{cases},\ |\det J_{\Phi(\rho,\vartheta)}| = \rho,$$

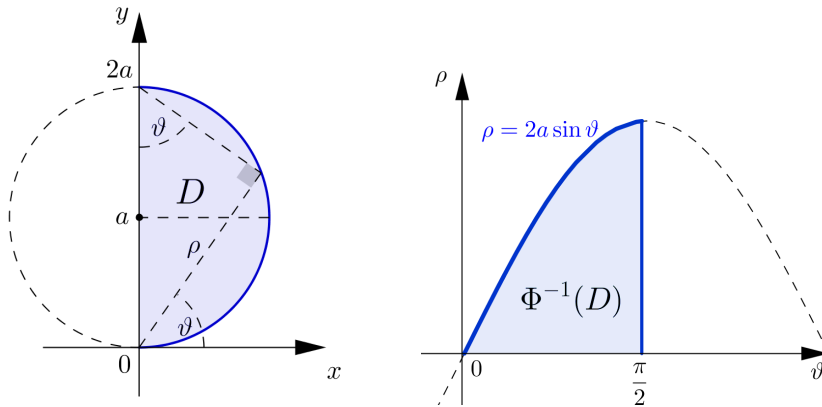
in modo tale che invece di integrare la funzione $f(x,y)$ sull'insieme D integriamo la funzione

$$f(\rho,\vartheta) = \sqrt{4a-\rho^2}$$

sull'insieme

$$\Phi^{-1}(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \vartheta \leq \pi/2,\ 0 \leq \rho \leq 2a \leq \cos\vartheta\}.$$

Infatti, sostituendo $x = \rho\cos\vartheta, y = \rho\sin\vartheta$ nelle disuguaglianze che definisco D si ottiene il sistema,

$$\begin{cases} \rho^2\cos^2\vartheta + (\rho\sin\vartheta - a)^2 \leq a^2 \\ \rho\cos\vartheta \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^2\cos^2\vartheta + \rho^2\sin^2\vartheta + a^2 - 2a\rho\sin\vartheta \leq a^2 \\ \cos\vartheta \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho \leq 2a\sin\vartheta \\ 0 \leq \vartheta \leq \pi/2 \end{cases}.$$

Quindi, ricordando il fattore jacobiano di trasformazione, l'integrale diventa,

$$V = 4\iint_D \sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,dxdy = 4\iint_{\Phi^{-1}(D)} \rho\sqrt{4a^2-\rho^2}\,d\rho d\vartheta = 2\int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\rho=0}^{2a\sin\vartheta} \sqrt{4a^2-\rho^2}\,d\left(\rho^2\right)\right) d\vartheta$$

$$= -2\int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\rho=0}^{2a\sin\vartheta} \sqrt{4a^2-\rho^2}\,d\left(4a^2-\rho^2\right)\right) d\vartheta = -2\int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{2}{3}\left(4a^2-\rho^2\right)^{3/2}\right]_{\rho=0}^{2a\sin\vartheta} d\vartheta$$

$$= -\frac{4}{3}\int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(4a^2-4a^2\sin^2\vartheta\right)^{3/2} - 2a^3\right) d\vartheta = -\frac{4}{3}\int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} \left(8a^3\left(1-\sin^2\vartheta\right)^{3/2} - 8a^3\right) d\vartheta$$

$$= \frac{32a^3}{3}\int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos^3\vartheta\right) d\vartheta = \frac{16a^3\pi}{3} - \frac{32a^3}{3}\int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\vartheta\,d\vartheta = \frac{16a^3\pi}{3} - \frac{32a^3}{3}\int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\sin^2\vartheta\right) d(\sin\vartheta)$$

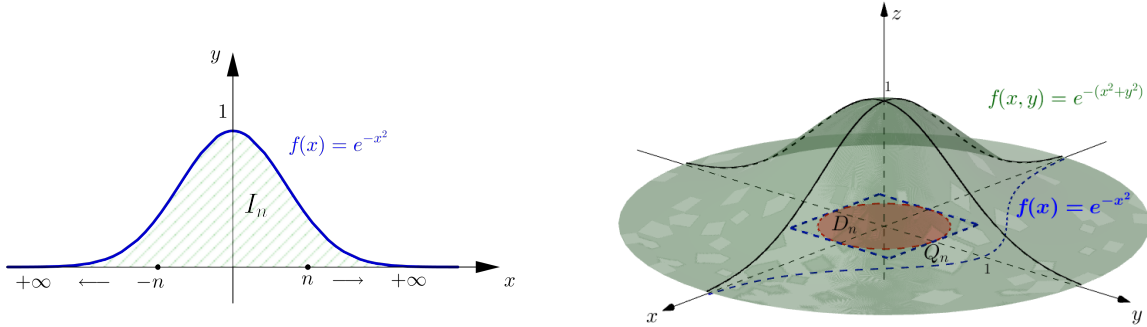
$$= \frac{16a^3\pi}{3} - \frac{32a^3}{3}\left[\sin\vartheta - \frac{\sin^3\vartheta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16a^3\pi}{3} - \frac{32a^3}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{16a^3\pi}{9}(3\pi-4).$$

Esempio 1.15. Dimostrare che

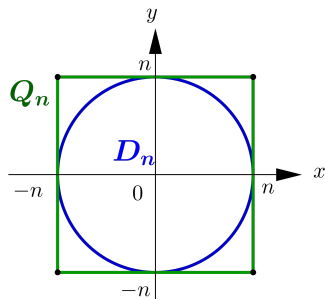
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

E' interessante osservare che tale integrale improprio in una variabile pur essendo convergente non si può calcolare determinando una primitiva della funzione e^{-x^2}. Si può dimostrare infatti che tale primitiva non è esprimibile mediante le funzioni elementari. Per aggirare questo problema consideriamo la seguente funzione in due variabili

$$f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)},$$

il cui grafico, riportato in figura, si ottiene ruotando il grafico di e^{-x^2} attorno all'asse z. Ora calcoliamo

l'integrale di $f(x,y)$ su due differenti domini: un quadrato e una circonferenza definiti come segue:

$$Q_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : [-n,n] \times [-n,n]\}, \qquad D_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le n^2\}.$$

Cominciamo a fare il calcolo sul quadrato Q_n. Dato che Q_n è semplice rispetto ad entrambi gli assi, per le proprietà della funzione esponenziale otteniamo

$$\begin{aligned}&\iint_{Q_n} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy \\ &= \int_{x=-n}^{n} e^{-x^2}\left(\int_{y=-n}^{n} e^{-y^2}\,dy\right)dx \\ &= \int_{x=-n}^{n} e^{-x^2}\,dx \int_{y=-n}^{n} e^{-y^2}\,dy = I_n \cdot I_n = I_n^2,\end{aligned}$$

dove

$$I_n = \int_{-n}^{n} e^{-x^2}\,dx.$$

Calcoliamo ora l'integrale su dominio D_n. Passiamo alle coordinate polari, usando una trasformazione $\Phi(\rho,\vartheta) = (\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta)$, in modo che invece di integrare la funzione $f(x,y)$ sull'insieme D_n, integriamo la funzione $f(\rho,\vartheta) = e^{-\rho^2}$ sull'insieme $\Phi^{-1}(D_n)$ definito da

$$\Phi^{-1}(D_n) := \{(\rho,\vartheta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le \rho \le n,\ 0 \le \vartheta \le 2\pi\}.$$

Quindi, ricordando il fattore jacobiano di trasformazione, si ha

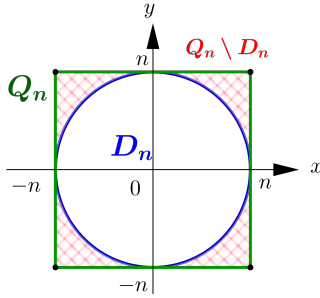
$$\begin{aligned}\iint_{D_n} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy &= \iint_{\Phi^{-1}(D_n)} e^{-\rho^2}\rho\,d\rho d\vartheta = \int_{\vartheta=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{n} \rho e^{-\rho^2}\,d\rho d\vartheta = 2\pi\int_{\rho=0}^{n} e^{-\rho^2}\,d\left(\frac{\rho^2}{2}\right) = -\pi\int_{\rho=0}^{n} e^{-\rho^2}\,d\left(-\rho^2\right) \\ &= -\pi\left[e^{-\rho^2}\right]_0^n = \pi(1-e^{-n^2}).\end{aligned}$$

A questo punto, considerando i due risultati ottenuti, possiamo osservare che, quando $n \to +\infty$ avremo,

$$\iint_{Q_n} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = I_n^2 \longrightarrow I^2, \qquad \iint_{D_n} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \pi(1-e^{-n^2}) \longrightarrow \pi,$$

dove I è proprio l'integrale che stiamo cercando di determinare. Quindi per terminare la dimostrazione basta verificare che $I^2 = \pi$ ossia che risultati di questi due limiti sono uguali. Intuitivamente la cosa è facile da accettare, nel senso che quando $n \to +\infty$ sia il quadrato Q_n che il cerchio D_n *diventano* tutto il piano,

$$\iint_{Q_n} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy \overset{n\to+\infty}{=} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy, \qquad \iint_{D_n} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy \overset{n\to+\infty}{=} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy.$$

Per formalizzare questo ragionamento intuitivo, basta dimostrare che il limite della loro differenza è zero.

Osservando che per costruzione $D_n \subset Q_n$, sia ha che

$$\iint_{Q_n} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy - \iint_{D_n} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \iint_{Q_n\setminus D_n} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy.$$

Inoltre la funzione $e^{-(x^2+y^2)}$ è decrescente rispetto alla distanza dall'origine e dunque l'estremo superiore dei suoi valori su $Q_n \setminus D_n$ verrà raggiunto necessariamente sul bordo del cerchio D_n (sono i punti più vicini all'origine). Così maggiorando si ottiene

$$0 \le \iint_{Q_n\setminus D_n} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy \le \iint_{Q_n\setminus D_n} e^{-n^2}\,dxdy = e^{-n^2}\iint_{Q_n\setminus D_n} dxdy = e^{-n^2}|Q_n \setminus D_n| = e^{-n^2}\cdot(4n^2-\pi n^2)$$
$$\le n^2e^{-n^2}\cdot(4-\pi) \to 0,$$

in quanto $4-\pi > 0$ e per $n \to +\infty$ si ha che $n^2e^{-n^2} \to 0$.

1.5 Integrali tripli

La definizione dell'integrale multiplo o integrale n-dimensionale per funzioni di $n \ge 3$ variabili reali ricalca quella appena vista per l'integrale doppio per funzioni di 2 variabili. Ci limitiamo ad indicare esplicitamente i cambiamenti dovuti all'aumento della dimensione nel caso $n = 3$. Il ruolo dei rettangoli nel piano è ora svolto dai parallelepipedi nello spazio. Consideriamo cioè il generico insieme

$$P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3].$$

Una partizione σ di P è ottenuta come il prodotto cartesiano di partizioni degli intervalli $[a_1, b_1], [a_2, b_2]$ ed $[a_3, b_3]$, mediante punti $\{x_0, x_1, \ldots, x_j\}, \{y_0, y_1, \ldots, y_j\}$ e $\{z_0, z_1, \ldots, z_r\}$ rispettivamente. Il parallelepipedo P si descrive dunque come l'unione dei parallelepipedi

$$P_{i,j,r} = [a_{h-1}, b_h] \times [a_{k-1}, b_k] \times [a_{m-1}, b_m].$$

Sia $f : P \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Allora le somme inferiori e superiori di f su P relative alla partizione σ sono definite come

$$s(f,\sigma) = \sum_{h=1}^{i}\sum_{k=1}^{j}\sum_{m=1}^{r} m_{h,k,m}(x_{h-1}, x_h)(y_{k-1}, y_k) \times [z_{m-1}, z_m]$$
$$S(f,\sigma) = \sum_{h=1}^{i}\sum_{k=1}^{j}\sum_{m=1}^{r} M_{h,k,m}(x_{h-1}, x_h)(y_{k-1}, y_k) \times [z_{m-1}, z_m]$$

con

$$m_{h,k,m} = \inf_{(x,y,z)\in P} f(x,y,z), \qquad M_{h,k,m} = \sup_{(x,y,z)\in P} f(x,y,z).$$

Diremo, in analogia a quanto fatto per gli integrali doppi, che la funzione f è integrabile su P se

$$\inf_P S(f,\sigma) = \sup_P s(f,\sigma),$$

ovvero se l'estremo superiore, al variare della scomposizione σ, delle somme inferiori è uguale l'estremo inferiore, al variare della scomposizione σ, delle somme superiori. Tale valore comune viene detto integrale triplo di f su P e indicato con il simbolo

$$\iiint_P f(x,y,z)\,dxdydz = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_3}^{b_2} f(x,y,z)\,dxdydz.$$

Anche in questa situazione, le funzioni continue risultano integrabili. Volendo ampliare la definizione di integrale triplo a generici insiemi tridimensionali limitati $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, è necessario definire il concetto di misurabilità per tali insiemi. Ciò può essere fatto in analogia a quanto fatto per gli integrali doppi, sostituendo al ruolo del rettangolo R quello di un qualunque parallelepipedo P contenente Ω. In tal caso, se P è un parallelepipedo che contiene Ω, estendiamo f a $\tilde{f} : \Omega \to \mathbb{R}$ nel modo seguente

$$\tilde{f} := \begin{cases} f(x,y,z), & \text{se} \quad (x,y,z) \in \Omega \\ 0, & \text{se} \quad (x,y,z) \in P \setminus \Omega. \end{cases}$$

Diciamo che f è integrabile su Ω se $\tilde{f}$ è integrabile su P e si pone

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{P} \tilde{f}(x,y,z)\,dxdydz.$$

Come in $\mathbb{R}^2$, se f è una funzione continua in generale l'estensione $\tilde{f}$ non lo è e quindi non è detto che $\tilde{f}$ sia integrabile su P. L'integrabilità di f su Ω dipende anche qui dalla regolarità del bordo $\partial\Omega$ definito come

$$\partial\Omega := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \forall\, \varepsilon > 0,\ B((x,y,z),\varepsilon) \cap \Omega \neq 0,\ \text{e}\ B((x,y,z),\varepsilon) \cap \Omega^C \neq 0\},$$

dove $B((x,y,z))$ questa volta è la sfera aperta di centro (x,y,z) e raggio ε. Sia Ω dunque un insieme limitato di $\mathbb{R}^3$. L'insieme Ω si dice *misurabile* se la sua funzione caratteristica

$$\chi_D(x,y,z) := \begin{cases} 1, & \text{se} \quad (x,y,z) \in \Omega \\ 0, & \text{se} \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega \end{cases}$$

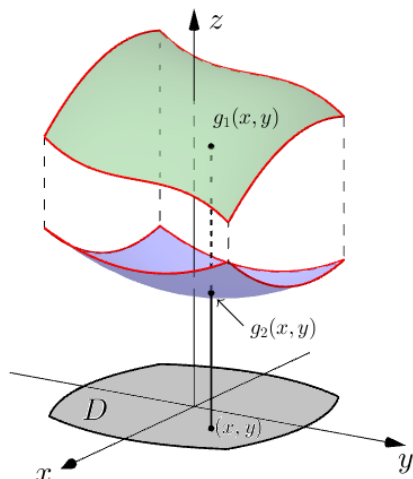
è integrabile su Ω. La misura di Ω si indica con $m(\Omega) = |\Omega|$ e si pone

$$m(\Omega) = |\Omega| = \iiint_{\Omega} \chi_\Omega(x,y,z)\,dxdydz.$$

Risultano misurabili gli insiemi più comuni della geometria euclidea, quali le sfere, i cilindri, i coni, i poliedri e così via, e la nozione di misura introdotta coincide con l'usuale concetto di volume. Le funzioni di due variabili $f(x,y)$ continue hanno misura nulla, nel senso che il loro *grafico* è una superficie regolare che ha misura tridimensionale nulla (ha evidentemente un'area). Consideriamo ora regioni particolari dello spazio per le quali il calcolo dell'integrale triplo può essere ridotto a integrali mono e bidimensionali. Tali sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ generalizzano gli insiemi semplici rispetto agli assi del piano, e ci permettono di ottenere formule esplicite di riduzione per un integrale triplo. Precisamente si presentano due situazioni tipiche.

Integrazione per fili

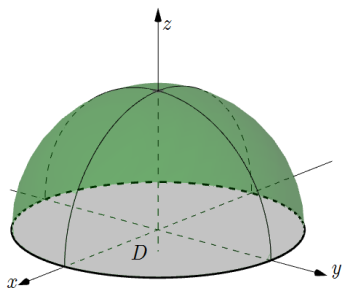
Un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ si dice semplice (o normale) rispetto all'asse z se è della forma

$$\Omega := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D,\ g_1(x,y) \leq z \leq g_2(x,y)\},$$

dove a sua volta, D è un insieme misurabile e chiuso del piano e le funzioni $g_1(x,y), g_2(x,y)$ sono definite continue in $D \subset \mathbb{R}^2$. Geometricamente, la formula significa che prima (nell'integrale più interno) si integra lungo il "filo" $z \in (g_1(x,y), g_2(x,y))$, da qui necessità dell'ipotesi di continuità delle funzioni $g_1(x,y)$ e $g_2(x,y)$ per garantirne l'integrabilità, e poi si fa variare $(x,y) \in D$. Allora, se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è una funzione continua e integrabile su Ω l'integrale si può calcolare mediante la formula detta *di integrazione per fili*:

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\, dxdydz = \iint_{D} \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz \right) dxdy.$$

Esempio 1.16. Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_{\Omega} x^2 z\, dxdydz, \quad \text{con} \quad \Omega := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \right\}.$$

L'insieme Ω rappresenta la semisfera superiore di centro l'origine e raggio R, che è un insieme compatto e misurabile. La funzione $f(x,y,z)$ è continua sull'insieme Ω quindi è integrabile. Per il calcolo procediamo per fili:

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} x^2 z\, dxdydz &= \iint_{D} \left(\int_{z=0}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} x^2 z\ dz \right) dxdy \\ &= \iint_{D} \left(\left[x^2 \frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \right) dxdy \\ &= \frac{1}{2} \iint_{D} x^2 (R^2 - x^2 - y^2)\, dxdy,\end{aligned}$$

dove l'insieme D è dato dall'intersezione della semisfera e dal piano $z = 0$, ossia del cerchio

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le R^2\}.$$

Si tratta ora di calcolare l'integrale doppio sull'insieme D. Passiamo in coordinate polari utilizzando la trasformazione $\Phi(\rho, \vartheta)$

$$\Phi(\rho,\vartheta) = \begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \end{cases}, |\det J_{\Phi(\rho,\vartheta)}| = \rho \quad \rho \in [0,R],\ \vartheta \in [0,2\pi],$$

così l'integrale diventa

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\iint_{D} x^2(R^2-x^2-y^2)\, dxdy &= \frac{1}{2}\iint_{\Phi^{-1}(D)} \rho^3 \cos^2\vartheta (R^2-\rho^2)\ d\rho d\vartheta = \frac{1}{2}\int_{\vartheta=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{R} \rho^3\cos^2\vartheta(R^2-\rho^2)\, dxdy \\ &= \frac{1}{2}\int_{\vartheta=0}^{2\pi} \cos^2\vartheta\ d\vartheta \int_{\rho=0}^{R} \rho^3 R^2 - \rho^5\ d\rho d\vartheta = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\vartheta + \cos\vartheta\sin\vartheta)\right]_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^4 R^2}{4} - \frac{\rho^6}{6}\right]_0^R = \frac{\pi R^6}{24}.\end{aligned}$$

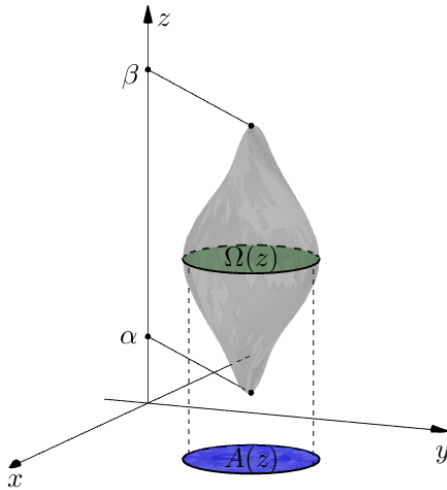
Integrazione per sezioni

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ misurabile tale che la coordinata z dei suoi punti vari in un intervallo $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$. Per ogni z_0 in tale intervallo, poniamo

$$S(z_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z_0) \in \Omega\};$$

l'insieme $S(z_0)$ altro non è che la proiezione sul piano xy della sezione Ω_{z_0} risultante dall'intersezione di Ω con il piano $z = z_0$ (si veda la Figura). L'insieme Ω può essere descritto come

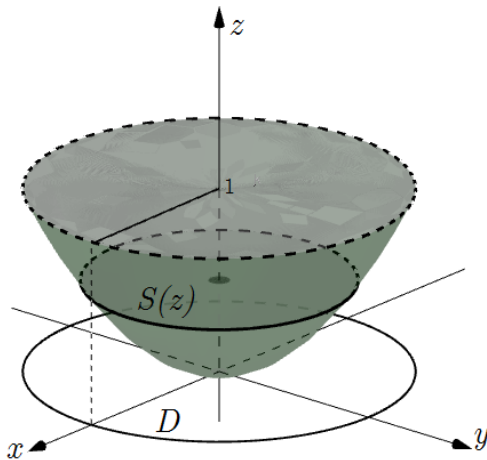
$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in S(z),\ \alpha \le z \le \beta\},$$

dove, per ogni $z \in [\alpha, \beta]$, $\Omega(z)$ è un dominio regolare del piano. Allora, se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è una funzione continua e integrabile su Ω, l'integrale si può calcolare mediante la formula detta *di integrazione per sezioni*:

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)\, dxdydz = \int_{z=z_1}^{z_2} \left(\iint_{S(z)} f(x, y, z)\, dxdy \right) dz.$$

Esempio 1.17. Calcolare l'integrale triplo della funzione $f(x, y, z) = |x|z$ sull'insieme Ω, dove Ω è il tronco di paraboloide delimitato dalle superfici $z = 1$ e $z = x^2 + y^2$.

L'insieme Ω rappresentato in figura si può scrivere come

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le z \le 1\},$$

è un insieme compatto e misurabile. La funzione $f(x, y, z)$ è continua sull'insieme Ω quindi è integrabile. Per il calcolo procediamo sia per fili che per sezioni. Per sezioni: facciamo variare z tra $z_1 = 0$ e $z_2 = 1$, e consideriamo le sezioni $S(z)$ che si ottengono con piani $z = \bar{z}$ paralleli al piano $z = 1$, ossia i cerchi $x^2 + y^2 \le z$. Allora si ha che

$$\iiint_\Omega |x|z\, dxdydz = \int_{z=0}^{1} \left(\iint_{S(z)} |x|z\ dxdy \right) dz$$
$$= \int_{z=0}^{1} z \iint_{x^2+y^2 \le z} |x|\ dxdy\ dz.$$

Consideriamo l'integrale doppio più interno. Passiamo in coordinate polari utilizzando la trasformazione $\Phi(\rho, \vartheta)$

$$\Phi(\rho, \vartheta) = \begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \end{cases},\ |\det J_{\Phi(\rho,\vartheta)}| = \rho, \quad \rho \in [0, \sqrt{z}],\ \vartheta \in [0, 2\pi],$$

cosi l'integrale diventa

$$\int_{z=0}^{1} z \iint_{x^2+y^2 \le z} |x|\ dxdy\ dz = \int_{z=0}^{1} z \iint_{\Phi^{-1}(S(z))} \rho^2 |\cos \vartheta|\ d\rho d\vartheta\ dz = \int_{z=0}^{1} z \int_{\vartheta=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{\sqrt{z}} \rho^2 |\cos \vartheta|\ d\rho d\vartheta\ dz$$
$$= \int_{z=0}^{1} z \left(\int_{\vartheta=0}^{2\pi} |\cos \vartheta|\ d\vartheta \int_{\rho=0}^{\sqrt{z}} \rho^2\ d\rho \right) dz = \int_{z=0}^{1} z \left(4 \int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} \cos \vartheta\ d\vartheta \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^{\sqrt{z}} \right) dz$$
$$= \frac{4}{3} \int_{z=0}^{1} z \left([\sin \vartheta]_0^{\frac{\pi}{2}} z^{3/2} \right) dz = \frac{4}{3} \int_{z=0}^{1} z^{5/2}\ dz = \frac{8}{21} \left[z^{7/2} \right]_0^1 = \frac{8}{21}.$$

In alternativa, procedendo per fili, consideriamo come insieme D di variazione di x, y il cerchio di centro l'origine e raggio unitario, e facciamo variare z tra il paraboloide e il piano, ossia tra $g_1(x, y) = x^2 + y^2$ e

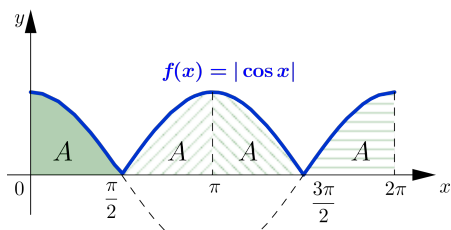
$g_2(x,y)=1$. Allora l'integrale diventa

$$\iint_D \left(\int_{z=x^2+y^2}^1 |x| z\ dz\right) dxdy = \iint_{x^2+y^2\leq 1} |x| \left(\int_{z=x^2+y^2}^1 z\ dz\right) dxdy = \iint_{x^2+y^2\leq 1} |x| \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=x^2+y^2}^1 dxdy$$
$$= \frac{1}{2}\iint_{x^2+y^2\leq 1} |x|(1-(x^2+y^2)^2)\, dxdy.$$

Anche in questo caso conviene passare in coordinate polari utilizzando la trasformazione $\Phi(\rho,\vartheta)$

$$\Phi(\rho,\vartheta) = \begin{cases} x=\rho\cos\vartheta \\ y=\rho\sin\vartheta \end{cases}, |\det J_{\Phi(\rho,\vartheta)}| = \rho, \quad \rho\in[0,1],\ \vartheta\in[0,2\pi],$$

così si ottiene

$$\frac{1}{2}\iint_{x^2+y^2\leq 1} |x|(1-(x^2+y^2)^2)\, dxdy = \frac{1}{2}\iint_{\Phi^{-1}(D)} \rho^2|\cos\vartheta|(1-\rho^4)\ d\rho d\vartheta = \frac{1}{2}\int_{\vartheta=0}^{2\pi} |\cos\vartheta|\ d\vartheta \int_{\rho=0}^1 \rho^2(1-\rho^4)\ d\rho$$
$$= 2\int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta\ d\vartheta \int_{\rho=0}^1 \rho^2-\rho^6\ d\rho = 2\left[\sin\vartheta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\rho^3}{3}-\frac{\rho^7}{7}\right]_0^1 = 2\cdot\frac{4}{21} = \frac{8}{21}.$$

Per completezza, giustifichiamo il passaggio

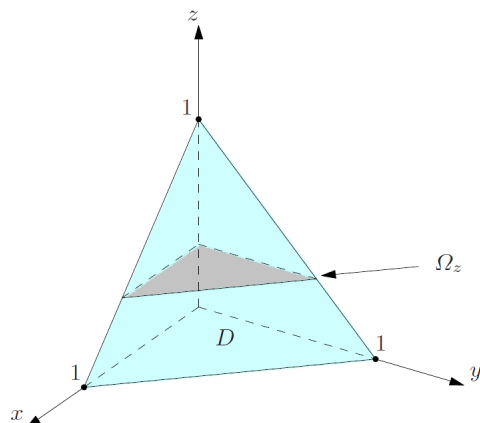
$$\int_0^{2\pi} |\cos\ x|\ dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\ x\ dx.$$

Come si può osservare dal grafico della funzione $f(x)=|\cos x|$, calcolare l'integrale sull'intero periodo è equivalente a calcolare 4 volte l'integrale nell'intervallo tra $[0,\pi/2]$ poiché le aree A nei rispettivi intervalli sono tutte uguali.

Esempio 1.18. Calcolare il valore medio della funzione

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$$

nel tetraedro definito da

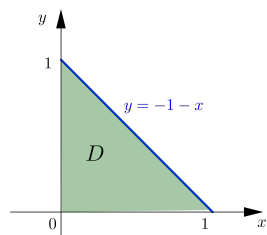
$$\Omega := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y+z\leq 1,\ x,y,z\geq 0\}.$$

Ricordiamo che il valore medio di una funzione f rispetto ad un dominio Ω è dato da

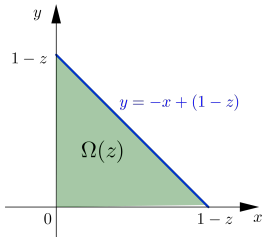
$$\bar{f}_\Omega = \frac{1}{|\Omega|}\iiint_\Omega f(x,y,z)\, dxdydz$$

Cominciamo allora calcolando la misura, ossia il volume, del tetraedro, cioè l'integrale

$$\iiint_\Omega dxdydz.$$

Procediamo sia per sezioni che per fili.

Per fili, considerando $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y\leq 1,\ x,y\geq 0\}$ si ha che

$$\iiint_\Omega dxdydz = \iint_D \left(\int_{z=0}^{1-x-y} dz\right) dxdy = \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{1-x} (1-x-y)\, dxdy$$
$$= \int_{x=0}^1 \frac{(1-x)^2}{2} dx = \frac{1}{2}\int_{x=0}^1 x^2\ dx = \frac{1}{6}.$$

Per sezioni, considerando $\Omega(z)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y\leq 1-z,\ x,y\geq 0\}$ si ha che

$$\iiint_\Omega dxdydz = \int_{z=0}^1 \left(\iint_{\Omega(z)} dxdy \right) dz$$

$$= \int_{z=0}^1 (\text{Area del triangolo } \Omega(z))dz = \int_{z=0}^1 \frac{(1-z)^2}{2} dz = \frac{1}{2}\int_{z=0}^1 z^2 \, dx = \frac{1}{6}.$$

Calcoliamo ora l'integrale

$$\iiint_\Omega x^2+y^2+z^2 \, dxdydz = \iiint_\Omega x^2 \, dxdydz + \iiint_\Omega y^2 \, dxdydz + \iiint_\Omega z^2 \, dxdydz.$$

Integriamo per fili le funzioni x^2 e y^2 e per sezioni la funzione z^2,

$$\iint_D x^2 \left(\int_{z=0}^{1-x-y} dz \right) dxdy + \iint_D y^2 \left(\int_{z=0}^{1-x-y} dz \right) dxdy + \int_{z=0}^1 z^2 \left(\iint_{\Omega(z)} dxdy \right) dz = \frac{1}{60} + \frac{1}{60} + \frac{1}{60} = \frac{1}{20};$$

quindi il valore medio della funzione f è dato da $\bar{f}_\Omega = 1/20 \cdot 6 = 3/10$.

1.6 Cambiamenti di variabile negli integrali tripli

Anche per il calcolo degli integrali tripli, può essere utile eseguire particolari trasformazioni di coordinate. Vale a tal proposito un teorema perfettamente analogo al teorema 1.5 enunciato per gli integrali doppi

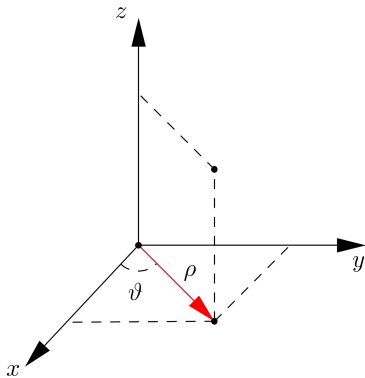
Teorema 1.6 (Cambiamento di variabili negli integrali tripli)

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un dominio misurabile, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile. Allora

$$\iiint_\Omega f(x,y,z) \, dxdydz = \iiint_{\Phi^{-1}(\Omega)} f\left(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\right) \cdot |\det J_{\Phi(u,v,w)}| \, dudvdw,$$

dove la trasformazione $\Phi(u,v,w) \in C^1(\Omega)$.

Una formula simile vale anche quando la dimensione è maggiore di tre. Vediamo in particolare cosa succede per le trasformazioni in coordinate cilindriche e sferiche.

Coordinate cilindriche

L'analogo delle coordinate polari che si utilizzano per descrivere insiemi in $\mathbb{R}^3$ che abbiano qualche simmetria rispetto all'asse z sono le *coordinate cilindriche* (ρ, ϑ, z) così definite

$$\Phi_c(\rho,\vartheta,z) = \begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \\ z = z \end{cases},$$

con

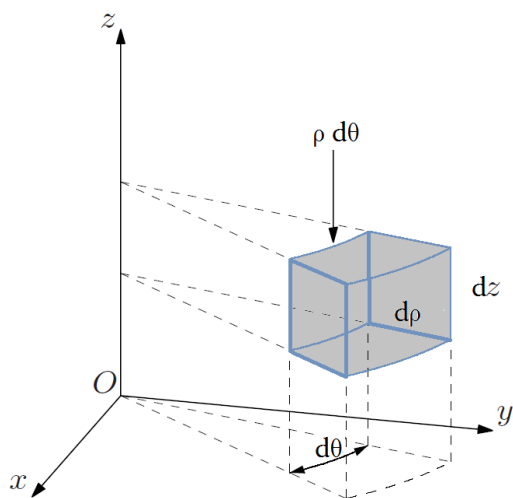
$$\rho \geq 0, \vartheta \in [0, 2\pi), z \in \mathbb{R}.$$

A questa trasformazione di coordinate corrisponde la funzione

$$\Phi_c : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(\rho,\vartheta,z) \mapsto (\underbrace{\rho\cos\vartheta}_{x(\rho,\vartheta,z)}, \underbrace{\rho\sin\vartheta}_{y(\rho,\vartheta,z)}, \underbrace{z}_{z(\rho,\vartheta,z)}).$$

Il modulo del determinante della matrice jacobiana è dato da

$$\left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho}(\rho,\vartheta,z) & \frac{\partial x}{\partial \vartheta}(\rho,\vartheta,z) & \frac{\partial x}{\partial z}(\rho,\vartheta,z) \\ \frac{\partial y}{\partial \rho}(\rho,\vartheta,z) & \frac{\partial y}{\partial \vartheta}(\rho,\vartheta,z) & \frac{\partial y}{\partial \rho}(\rho,\vartheta,z) \\ \frac{\partial z}{\partial \rho}(\rho,\vartheta,z) & \frac{\partial z}{\partial \vartheta}(\rho,\vartheta,z) & \frac{\partial z}{\partial z}(\rho,\vartheta,z) \end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho\cos\vartheta) & \frac{\partial}{\partial \vartheta}(\rho\cos\vartheta) & \frac{\partial}{\partial z}(\rho\cos\vartheta) \\ \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho\sin\vartheta) & \frac{\partial}{\partial \vartheta}(\rho\sin\vartheta) & \frac{\partial}{\partial z}(\rho\sin\vartheta) \\ \frac{\partial}{\partial \rho}(z) & \frac{\partial}{\partial \vartheta}(z) & \frac{\partial}{\partial z}(z) \end{pmatrix}\right|$$

$$= \left|\det\begin{pmatrix} \rho\cos\vartheta & -\rho\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \rho\cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = \left|\rho\cos^2\vartheta + \rho\sin^2\vartheta\right| = \rho,$$

Geometricamente, la giustificazione dell'elemento infinitesimo di volume è rappresentato nella figura seguente. Allora per una generica funzione continua $f(x, y, z)$, l'integrale in coordinate cilindriche diventa

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz$$

$$= \iiint_{\Phi_c^{-1}(D)} f(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta, z)\ \rho\ d\rho d\vartheta dz.$$

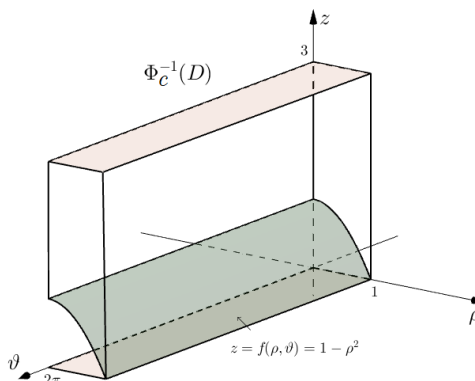
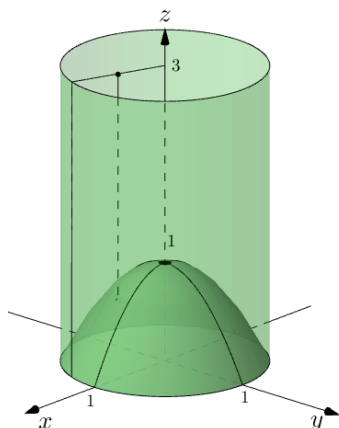
Esempio 1.19. Calcoliamo

$$\iiint_D (x^2 + y^2)\,dxdydz,$$

dove D è la regione contenuta all'interno del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, al di sotto del piano $z = 3$ e al di sopra del paraboloide di equazione $x^2 + y^2 + z = 1$. L'insieme D, normale rispetto all'asse z, è compatto e misurabile. La funzione f è continua e quindi è integrabile. Osserviamo l'insieme D può essere scritto come

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ 1 - x^2 - y^2 \leq z \leq 3\}.$$

Per il calcolo si può procedere sia per fili che per sezioni, ma anche passando in coordinate cilindriche con la trasformazione

$$\Phi_c(\rho, \vartheta, z) = \begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \\ z = z \end{cases} \quad \left|\det J_{\Phi_c(\rho,\vartheta,z)}\right| = \rho.$$

Impostiamo il calcolo nei vari modi. Utilizzando la trasformazione in coordinate cilindriche, anziché integrare la funzione $x^2 + y^2$ sull'insieme D, si integra la funzione ρ^2 sull'insieme $\Phi_c^{-1}(D)$ rappresentato nella

seconda figura e definito da

$$\Phi_c^{-1}(D) = \{(\rho, \vartheta, z) \in \mathbb{R}^3 : \vartheta \in [0, 2\pi],\ 0 \le \rho \le 1,\ 1 - \rho^2 \le z \le 3\}.$$

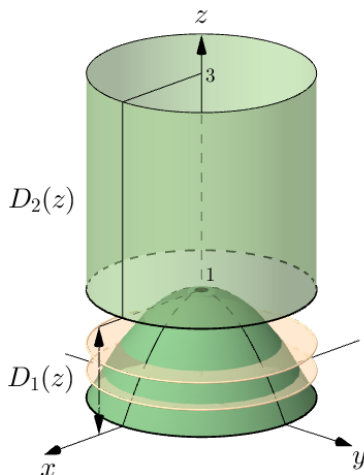
Ricordando il fattore jacobiano di trasformazione, si ha

$$\iiint_D (x^2 + y^2)\, dxdydz = \iiint_{\Phi_c^{-1}(D)} \rho^3\, d\rho d\vartheta dz = \int_{\vartheta=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{1} \int_{z=1-\rho^2}^{3} \rho^3\, d\rho d\vartheta dz$$

$$= 2\pi \int_{\rho=0}^{1} \rho^3\, [z]_{z=1-\rho^2}^{3}\, dz d\rho = 2\pi \int_{\rho=0}^{1} 2\rho^3 + \rho^5\, d\rho = 2\pi \left[\frac{\rho^4}{2} + \frac{\rho^6}{6}\right]_0^1 = \frac{4\pi}{3}.$$

Impostiamo il calcolo per fili. Con riferimento all'insieme D in figura, si ha

$$\iiint_D (x^2 + y^2)\, dxdydz = \iint_{D_1} \int_{z=1-x^2-y^2}^{3} (x^2 + y^2)\, dzdxdy = \iint_{\{x^2+y^2\le 1\}} (x^2 + y^2)\, [z]_{z=1-x^2-y^2}^{3}\, dxdy$$

$$= \iint_{\{x^2+y^2\le 1\}} (x^2 + y^2)(2 - x^2 - y^2) dxdy = \int_{\vartheta=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{1} \rho^3(2 - \rho^2) d\rho d\vartheta = 2\pi \left[\frac{\rho^4}{2} + \frac{\rho^6}{6}\right]_0^1 = \frac{4\pi}{3}.$$

Impostiamo il calcolo per sezioni. Poiché da $z = 0$ a $z = 1$ le sezioni, evidenziate in figura in arancione, sono delle corone circolari, mentre da $z = 1$ a $z = 3$ sono dei cerchi; allora l'integrale diventa

$$\iiint_D (x^2 + y^2)\, dxdydz$$
$$= \int_{z=0}^{1} \iint_{D_1(z)} (x^2 + y^2)\, dzdxdy + \int_{z=1}^{3} \iint_{D_2(z)} (x^2 + y^2)\, dzdxdy,$$

dove

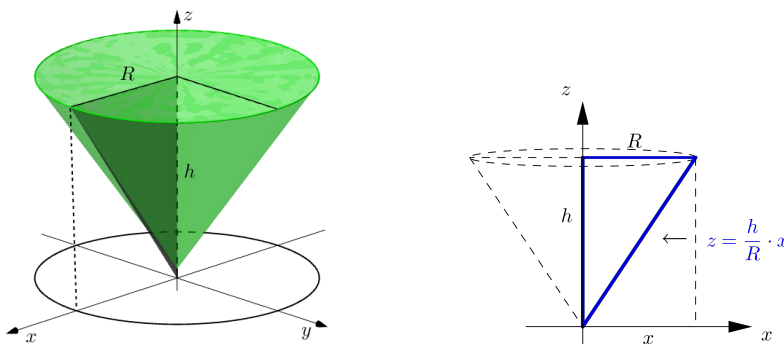
$$D_1(z) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - z \le x^2 + y^2 \le 1\}$$
$$D_2(z) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}.$$

Passando in coordinate polari negli integrali più interni si ha

$$\int_{z=0}^{1} \int_{\vartheta=0}^{2\pi} \int_{\rho=\sqrt{1-z}}^{1} \rho^3\, d\rho d\vartheta dz + \int_{z=1}^{3} \int_{\vartheta=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{1} \rho^3\, d\rho d\vartheta dz = 2\pi \int_{z=0}^{1} \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_{\sqrt{1-z}}^{1} dz + 2\pi \int_{z=1}^{3} \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 dz$$
$$= 2\pi \int_{z=0}^{1} \left(\frac{1}{4} - \frac{(1-z)^2}{4}\right) dz + \frac{\pi}{1} \int_{z=1}^{3} dz = \frac{4\pi}{3}.$$

Esempio 1.20. Calcolare il volume del cono retto con raggio di base R e altezza h. Consideriamo il cono con vertice nell'origine e calcoliamo l'integrale triplo della funzione costante 1 su cono; impostiamo il calcolo in coordinate cilindriche, ossia considerando la trasformazione $\Phi_c(\rho, \vartheta, z)$

$$\Phi_c(\rho, \vartheta, z) = (\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta, z) \text{ con } \quad \rho \ge 0, \vartheta \in [0, 2\pi), z \in \mathbb{R}.$$

Ora dobbiamo individuare la funzione integrare, ossia determinare l'equazione della superficie del cono. A questo scopo possiamo considerare la sezione nel piano zx ossia il il triangolo rappresentato in figura.

Si osserva facilmente che la retta che genera il cono (infinito) con una rotazione completa attorno all'asse z, ha equazione $z = hx/R$. Quindi l'equazione del cono è

$$z = \frac{h}{R}\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Si noti che l'equazione canonica del corrispondente (doppio) cono è data

$$z^2 = \frac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2) = \frac{h^2}{R^2} \cdot \rho^2.$$

Pertanto l'insieme C si ottiene delimitando il cono ottenuto con i piani $z = 0$ e $z = h$,

$$C = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq \frac{h}{R}\sqrt{x^2 + y^2},\ 0 \leq z \leq h\right\}.$$

In coordinate cilindriche l'insieme C si trasforma in

$$\Phi_c^{-1}(C) = \left\{(\rho, \vartheta, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq \frac{h}{R} \cdot \rho,\ 0 \leq z \leq h\right\}.$$

e quindi, ricordando il fattore jacobiano di trasformazione,

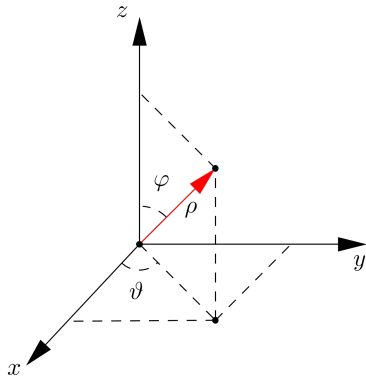
$$\begin{aligned}\iiint_C dxdydz &= \iiint_{\Phi_c^{-1}(C)} \rho\ d\rho d\vartheta dz = \int_{\vartheta=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{R}\int_{z=\frac{h\rho}{R}}^{h} \rho\ d\rho d\vartheta dz = 2\pi\int_{\rho=0}^{R}\left(\rho h - \frac{h\rho^2}{R}\right)\ d\rho = 2\pi\left[\frac{h\rho^2}{2} - \frac{h\rho^3}{3R}\right]_0^R \\ &= 2\pi\left[\frac{hR^2}{2} - \frac{hR^2}{3}\right] = \frac{h\pi R^2}{3}.\end{aligned}$$

Coordinate sferiche

Un altro cambio di variabili utile per descrivere insiemi che abbiano qualche simmetria rispetto all'origine sono le *coordinate sferiche* $(\rho, \vartheta, \varphi)$ definite come

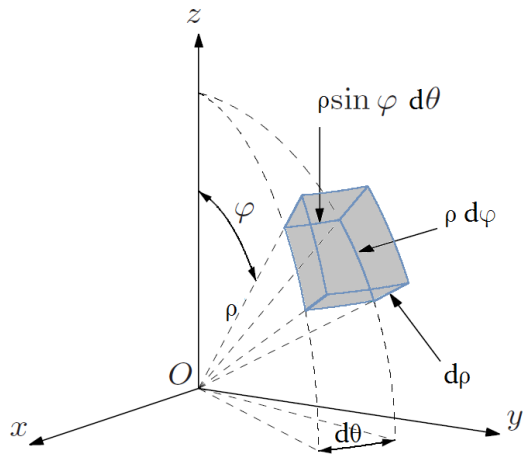
$$\Phi_s(\rho, \vartheta, \varphi) = \begin{cases} x = \rho\cos\vartheta\sin\varphi \\ y = \rho\sin\vartheta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases},$$

con

$$\rho \geq 0, \vartheta \in [0, 2\pi), \varphi \in [0, \pi).$$

A questa trasformazione di coordinate corrisponde la funzione

$$\begin{aligned}\Phi_s &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (\rho, \vartheta, \varphi) &\mapsto (\underbrace{\rho\cos\vartheta\sin\varphi}_{x(\rho,\vartheta,\varphi)}, \underbrace{\rho\sin\vartheta\sin\varphi}_{y(\rho,\vartheta,\varphi)}, \underbrace{\rho\cos\varphi}_{z(\rho,\vartheta,\varphi)}).\end{aligned}$$

Il modulo del determinante della matrice jacobiana è dato da

$$\begin{aligned}\left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho}(\rho,\vartheta,\varphi) & \frac{\partial x}{\partial\vartheta}(\rho,\vartheta,\varphi) & \frac{\partial x}{\partial\varphi}(\rho,\vartheta,\varphi) \\ \frac{\partial y}{\partial\rho}(\rho,\vartheta,\varphi) & \frac{\partial y}{\partial\vartheta}(\rho,\vartheta,\varphi) & \frac{\partial y}{\partial\varphi}(\rho,\vartheta,\varphi) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}(\rho,\vartheta,\varphi) & \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}(\rho,\vartheta,\varphi) & \frac{\partial\varphi}{\partial\varphi}(\rho,\vartheta,\varphi) \end{pmatrix}\right| &= \left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\cos\vartheta\sin\varphi) & \frac{\partial}{\partial\vartheta}(\rho\cos\vartheta\sin\varphi) & \frac{\partial}{\partial\varphi}(\rho\cos\vartheta\sin\varphi) \\ \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\sin\vartheta\sin\varphi) & \frac{\partial}{\partial\vartheta}(\rho\sin\vartheta\sin\varphi) & \frac{\partial}{\partial\varphi}(\rho\sin\vartheta\sin\varphi) \\ \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\cos\varphi) & \frac{\partial}{\partial\vartheta}(\rho\cos\varphi) & \frac{\partial}{\partial\varphi}(\rho\cos\varphi) \end{pmatrix}\right| \\ &= \left|\det\begin{pmatrix} \cos\vartheta\sin\varphi & -\rho\sin\vartheta\sin\varphi & \rho\cos\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & \rho\cos\vartheta\sin\varphi & \rho\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\varphi & 0 & -\rho\sin\varphi \end{pmatrix}\right| \\ &= \rho^2\sin\varphi.\end{aligned}$$

Geometricamente la giustificazione dell'elemento infinitesimo di volume è rappresentato nella figura a fianco. Allora per una funzione continua $f(x, y, z)$ l'integrale in coordinate sferiche diventa

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz$$

$$= \iiint_{\Phi_s^{-1}(D)} f(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta, \rho\cos\varphi)\ \rho^2 \sin\varphi\ d\rho d\vartheta d\varphi.$$

Esempio 1.21. Determiniamo il volume del solido D definito da

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 - z \le 0,\ z \ge \sqrt{x^2+y^2}\}.$$

L'insieme D è un insieme compatto e misurabile, che rappresenta l'intersezione tra la sfera di equazione $x^2+y^2+(z-1/2)^2 \le 1/4$ e un cono con asse di simmetria coincidente con l'asse z. Per determinare il volume di D dobbiamo calcolare

$$\iiint_D dxdydz.$$

Possiamo esprimere D in coordinate sferiche attraverso la trasformazione Φ_s,

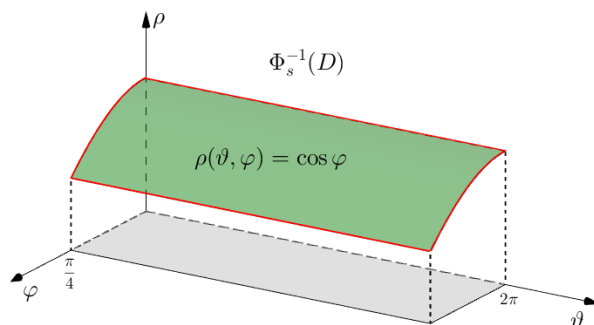
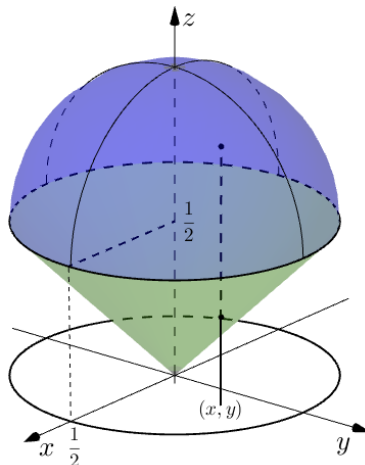
$$\Phi_s(\rho,\vartheta,\varphi) = \begin{cases} x = \rho\cos\vartheta\sin\varphi \\ y = \rho\sin\vartheta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases} \quad |\det \Phi_s(\rho,\vartheta,\varphi)| = \rho^2\sin\varphi, \qquad \text{con} \qquad \rho \ge 0, \vartheta \in [0,2\pi), \varphi \in [0,\pi).$$

Inoltre

$$\Phi_s^{-1}(D) := \{(\rho,\vartheta,\varphi) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le \rho \le \cos\varphi,\ 0 \le \varphi \le \pi/4,\ 0 \le \vartheta \le 2\pi\}.$$

Infatti sostituendo la trasformazione nelle disuguaglianze che definiscono D si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \rho^2\cos^2\vartheta\sin^2\varphi + \rho^2\sin^2\vartheta\sin^2\varphi + (1/2-\rho\cos\varphi)^2 \le 1/4 \\ \rho\cos\varphi \ge \sqrt{\rho^2\cos^2\vartheta\sin^2\varphi + \rho^2\sin^2\vartheta\sin^2\varphi} \\ 0 \le \vartheta \le 2\pi \\ 0 \le \varphi \le \pi \end{cases} = \begin{cases} \rho^2\cos^2\vartheta\sin^2\varphi + \rho^2\cos^2\varphi - \rho\cos\varphi \le 0 \\ \rho\cos\varphi \ge \sqrt{\rho^2\sin^2\varphi} \\ 0 \le \vartheta \le 2\pi \\ 0 \le \varphi \le \pi \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \rho^2 - \rho\cos\varphi \le 0 \\ \rho\cos\varphi \ge |\rho\sin\varphi| \\ 0 \le \vartheta \le 2\pi \\ 0 \le \varphi \le \pi \end{cases} = \begin{cases} \rho \le \rho\cos\varphi \\ \cos\varphi \ge \sin\varphi \\ 0 \le \vartheta \le 2\pi \\ 0 \le \varphi \le \pi \end{cases} = \begin{cases} \rho \le \cos\varphi \\ 0 \le \varphi \le \pi/4 \\ 0 \le \vartheta \le 2\pi \end{cases}.$$

Quindi, ricordando il fattore jacobiano della trasformazione, l'integrale diventa

$$\iiint_D dxdydz = \iiint_{\Phi_s^{-1}(D)} \rho^2 \sin\varphi \; d\rho d\vartheta d\varphi = \int_{\vartheta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{4}}\int_{\rho=0}^{\cos\varphi} \rho^2 \sin\varphi \; d\rho d\vartheta d\varphi = 2\pi \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi \int_{\rho=0}^{\cos\varphi} \rho^2 \; d\rho d\varphi$$

$$= 2\pi \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{\cos\varphi} d\varphi = \frac{2\pi}{3}\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi\cos^3\varphi \; d\varphi = \frac{2\pi}{3}\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{4}} \cos^3\varphi \; d(-\cos\varphi)$$

$$= -\frac{2\pi}{3}\left[\frac{\cos^4\varphi}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{2\pi}{3}\left(\frac{1}{4}-1\right) = \frac{\pi}{8}.$$

Si può osservare che il calcolo si sarebbe potuto anche eseguire per fili e per sezioni. Per fili:

$$\iiint_D dxdydz = \iint_{D_1}\left(\int_{z=(x^2+y^2)^{1/2}}^{(1/4-x^2+y^2)^{1/2}+1/2} dz\right) dxdy = \iint_{D_1}\left(1/4-x^2+y^2)^{1/2}+1/2-(x^2+y^2)^{1/2}\right) dxdy$$

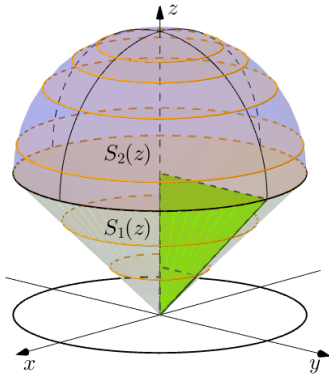
con $D_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1/4\}$. Utilizzando la trasformazione $\Phi(\rho,\vartheta)$ data da

$$\Phi(\rho,\vartheta) = \begin{cases} x = 1/2\rho\cos\vartheta \\ y = 1/2\rho\sin\vartheta \end{cases} \qquad |\det J_{\Phi(\rho,\vartheta)}| = 1/4\rho \; d\rho d\vartheta,$$

con $\rho\in[0,1]$, $\vartheta\in[0,2\pi)$, l'integrale diventa

$$\iint_{D_1}\left(1/4-x^2+y^2)^{1/2}+1/2-(x^2+y^2)^{1/2}\right) dxdy = \int_{\vartheta=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{1}\frac{\rho}{4}\left[\left(\frac{1}{4}-\frac{\rho^2}{4}\right)^{1/2}+1/2-\left(\frac{\rho^2}{4}\right)^{1/2}\right] d\rho d\vartheta$$

$$=\frac{\pi}{4}\int_{\rho=0}^{1}\left(\rho\left(1-\rho^2\right)^{1/2}+\rho-\rho^2\right) d\rho = \frac{\pi}{4}\left[-\frac{1}{3}\left(1-\rho^2\right)^{3/2}+\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right] = \frac{\pi}{8}.$$

Per sezioni: suddividiamo il dominio D opportunamente, considerando $D = D_1 \cup D_2$, ossia facendo prima variare z in $[0,1/2]$ e considerando le sezioni $S_1(z)$ che si ottengono con i piani paralleli al piano xy compresi tra i piani $z=0$ e $z=1/2$, e poi facendo variare z in $[1/2,1]$ e considerando le sezioni $S_2(z)$ che si ottengono con i piani paralleli al piano xy compresi tra i piani $z=1/2$ e $z=1$. Quindi si ha

$$\iiint_D dxdydz = \iiint_{D_1} dxdydz + \iiint_{D_2} dxdydz$$

$$= \int_{z=0}^{\frac{1}{2}}\left(\iint_{S_1(z)} dxdy\right) dz + \int_{z=\frac{1}{2}}^{1}\left(\iint_{S_2(z)} dxdy\right) dz,$$

dove

$$S_1(z) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le z^2\},$$
$$S_2(z) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le z-z^2\}.$$

Dunque

$$\int_{z=0}^{\frac{1}{2}}\left(\iint_{\{x^2+y^2\le z^2\}} dxdy\right) dz + \int_{z=\frac{1}{2}}^{1}\left(\iint_{\{x^2+y^2\le z-z^2\}} dxdy\right) dz$$

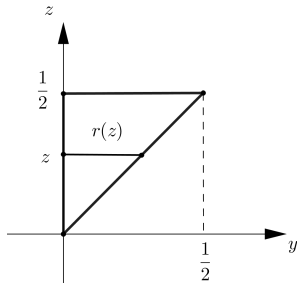
$$= \int_{z=0}^{\frac{1}{2}} \pi z^2 \; dz + \int_{z=\frac{1}{2}}^{1}\pi(z-z^2)\; dz = \pi\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \pi\left[\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$=\frac{\pi}{24}+\pi\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{8}+\frac{1}{24}\right] = \frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{8}.$$

Esempio 1.22. Calcolare

$$\iiint_D |z| \; dxdydz, \qquad D = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 1\}.$$

L'insieme D rappresenta una sfera centrata nell'origine di raggio unitario, insieme compatto e misurabile. La funzione f è continua in D e pertanto è integrabile. Si può inizialmente osservare che sia la funzione integranda che il dominio di integrazione sono simmetrici rispetto all piano xy, quindi è sufficiente calcolare

$$2\iiint_D z \, dxdydz, \qquad D^+ = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 1, \; z \ge 0\}.$$

Impostiamo il calcolo in coordinate sferiche utilizzando la trasformazione

$$\Phi_s(\rho,\vartheta,\varphi)=\begin{cases}x=\rho\cos\vartheta\sin\varphi\\ y=\rho\sin\vartheta\sin\varphi\\ z=\rho\cos\varphi\end{cases}\quad \text{con}\quad \rho\geq 0, \vartheta\in[0,2\pi),\varphi\in[0,\pi), |\det J_{\Phi_s(\rho,\vartheta,\varphi)}|=\rho^2\sin\varphi.$$

In questo modo invece di integrare la funzione z su D_+ dobbiamo integrare la funzione $\rho\cos\varphi$ sull'insieme

$$\Phi_s^{-1}(D^+)=\{(\rho,\vartheta,\varphi)\in\mathbb{R}^3 : 0\leq\rho\leq 1,\ 0\leq\varphi\leq\pi/2,\ 0\leq\vartheta\leq 2\pi\}.$$

Ricordando il fattore jacobiano di trasformazione, abbiamo che

$$2\iiint_{D^+} z\,dxdydz = 2\iiint_{\Phi_s^{-1}(D^+)}\rho^3\sin\varphi\cos\varphi\,d\rho d\varphi d\vartheta = 2\int_{\rho=0}^{1}\int_{\vartheta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}}\rho^3\sin\varphi\cos\varphi\,d\rho d\varphi d\vartheta$$

$$=4\pi\int_{\rho=0}^{1}\rho^3\,d\rho\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi = 4\pi\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1\left[\frac{\sin^2\varphi}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}.$$

Esempio 1.23. Determinare per quali $\alpha>0$ è finito il limite $\lim\limits_{R\to+\infty} I_R$ dove

$$I_R=\iiint_{\{1\leq x^2+y^2+z^2\leq R^2\}}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)^{\alpha}dxdydz.$$

L'insieme d'integrazione rappresenta una corona sferica, insieme compatto e misurabile. La funzione f è continua in $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 1\leq x^2+y^2+z^2\leq R^2\}$ ed è pertanto integrabile. Impostiamo il calcolo in coordinate sferiche, utilizzando la trasformazione

$$\Phi_s(\rho,\vartheta,\varphi)=\begin{cases}x=\rho\cos\vartheta\sin\varphi\\ y=\rho\sin\vartheta\sin\varphi\\ z=\rho\cos\varphi\end{cases}\quad \text{con}\quad \rho\geq 0, \vartheta\in[0,2\pi),\varphi\in[0,\pi), |\det J_{\Phi_s(\rho,\vartheta,\varphi)}|=\rho^2\sin\varphi.$$

Così invece di integrare la funzione data su D, integriamo la funzione $1/\rho^\alpha$ sull'insieme

$$\Phi_s^{-1}(D)=\{(\rho,\vartheta,\varphi)\in\mathbb{R}^3 : 1\leq\rho\leq R,\ 0\leq\varphi\leq\pi,\ 0\leq\vartheta\leq 2\pi\}.$$

Ricordando il fattore jacobiano di trasformazione, abbiamo che

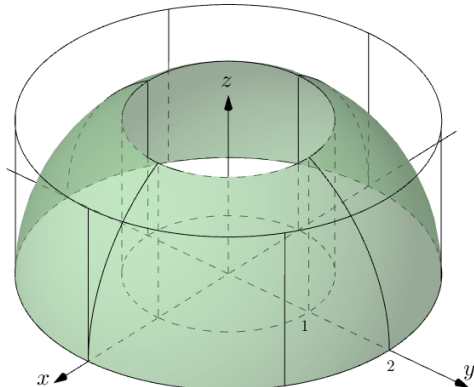
$$\iiint_D\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)^{\alpha}dxdydz=\iiint_{\Phi_s^{-1}(D)}\frac{1}{\rho^{\alpha-2}}\sin\varphi\,d\rho d\varphi d\vartheta=\int_{\rho=1}^{R}\int_{\vartheta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=0}^{\pi}\frac{1}{\rho^{\alpha-2}}\sin\varphi\,d\rho d\varphi d\vartheta$$

$$=2\pi\int_{\rho=1}^{R}\frac{1}{\rho^{\alpha-2}}\,d\rho\int_{\varphi=0}^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi=2\pi\int_{\rho=1}^{R}\frac{1}{\rho^{\alpha-2}}\left[-\cos^2\varphi\right]_0^{\pi}$$

$$=4\pi\int_{\rho=1}^{R}\frac{1}{\rho^{\alpha-2}}.$$

Quindo per $R\to+\infty$, l'integrale improprio è convergente se e solo se $\alpha-2>1$, ossia $\alpha>3$.

Esempio 1.24. Calcolare

$$\frac{1}{|D|}\iiint_D\frac{z\,dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}},\qquad D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 1\leq x^2+y^2\leq 4,\ 0\leq z\leq\sqrt{4-x^2-y^2}\}.$$

L'insieme D rappresenta l'intersezione tra la parte interna di una semisfera di raggio 2 e la parte compresa tra i due cilindri $x^2+y^2\leq 1$ e $x^2+y^2\leq 4$. Useremo le coordinate cilindriche,

$$\Phi_c(\rho,\vartheta,z)=\begin{cases}x=\rho\cos\vartheta\\ y=\rho\sin\vartheta\\ z=z\end{cases},\quad |\det J_{\Phi(\rho,\vartheta,z)}|=\rho.$$

Cominciamo con il calcolo di $|D|$: integriamo la funzione constante 1 sull'insieme

$$\Phi_c^{-1}(D):=\{(\rho,\vartheta,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\leq\vartheta\leq 2\pi,\ 1\leq\rho\leq 2,\ 0\leq z\leq\sqrt{4-\rho^2}\}.$$

Ricordando il fattore jacobiano di trasformazione, si ha

$$|D| = \iiint\limits_{\Phi_c^{-1}(D)} \rho \, d\rho d\vartheta dz = \int_{\vartheta=0}^{2\pi} \int_{\rho=1}^{2} \int_{z=0}^{\sqrt{4-\rho^2}} \rho \, d\rho d\vartheta dz = 2\pi \int_{\rho=1}^{2} \rho\sqrt{4-\rho^2} \, d\rho d\vartheta = \pi \left[\frac{(4-\rho^2)^{3/2}}{3} \right]_1^2 = 2\pi\sqrt{3}.$$

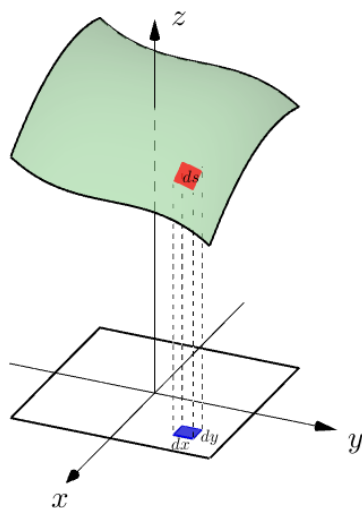
Dunque

$$\frac{1}{|D|} \iiint\limits_{D} \frac{z \, dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{3}} \iiint\limits_{\Phi_c^{-1}(D)} \frac{z \;\, \rho \, d\rho d\vartheta dz}{\rho} = \frac{1}{2\pi\sqrt{3}} \int_{\vartheta=0}^{2\pi} \int_{\rho=1}^{2} \int_{z=0}^{\sqrt{4-\rho^2}} z \, d\rho d\vartheta dz = \frac{1}{2\sqrt{3}} \int_{\rho=1}^{2} \left[z^2 \right]_0^{\sqrt{4-\rho^2}} \, d\rho$$

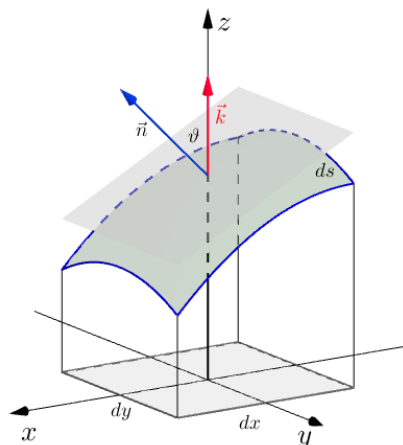
$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} \int_{\rho=1}^{2} 4-\rho^2 \, d\rho = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[4\rho - \frac{\rho^3}{3} \right]_1^2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{18}.$$

1.7 Applicazioni in geometria e in fisica

L'integrale multiplo di una certa funzione su un certo dominio può avere diverse interpretazioni oltre a quelle viste fino a questo momento come l'area di una superficie piana oppure il volume di un solido. In questa sezione vedremo come si possono calcolare superfici di solidi, centri di massa e momenti d'inerzia.

Area della superficie di un grafico

Consideriamo una superficie descritta dal grafico di una funzione differenziabile $z = f(x, y)$ con $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, e di volerne calcolare l'area. Possiamo considerare un elemento infinitesimo ds della superficie $f(x, y)$ a cui corrisponde l'elemento infinitesimo nel piano xy dato da $dxdy$. Sappiamo che l'integrale doppio fatto sul rettangolino infinitesimo della funzione $f(x, y)$ è il volume della parte di spazio compresa tra la funzione e l'elemento infinitesimo $dxdy$, ma se si cambia la funzione da integrare possiamo ottenere l'area della superficie con l'integrale doppio seguente

$$S = \iint\limits_{D} ds. \tag{1.4}$$

Si tratta di capire che relazione c'è tra ds e $dxdy$, ossia che relazione sussiste tra l'area della superficie ds e la sua proiezione sul piano xy. Evidentemente l'area dell'elemento ds dipende da quanto è inclinata la superficie rispetto al piano xy (ad esempio se fosse perfettamente orizzontale, cioè parallela al piano xy, l'area di ds sarebbe uguale a quella di $dxdy$). Per misurare l'inclinazione introduciamo qualche notazione.

Sia $\vec{n}$ il versore ortonormale alla superficie ds, ossia ortogonale al piano tangente alla superficie in quel punto e di norma (lunghezza) unitaria. Sia $\vec{k}$ il versore dell'asse z e sia ϑ l'angolo tra $\vec{n}$ e $\vec{k}$. Allora la relazione che intercorre tra ds e $dxdy$ è

$$dxdy = ds \cos\vartheta.$$

Allora l'integrale (1.4) diventa

$$S = \iint\limits_{D} ds = \iint\limits_{D} \frac{dxdy}{\cos\vartheta}.$$

Bisogna ora capire come varia l'angolo ϑ in funzione di x e y. Dato che la funzione f è differenziabile, l'equazione del piano tangente in un punto (x_0, y_0) è data da

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + o(\|x - x_0\|),$$

che se riscritta in modo opportuno diventa

$$\underbrace{-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}_{a}(x - x_0) \underbrace{-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}_{b}(y - y_0) + 1 \cdot \underbrace{z - f(x_0, y_0)}_{z - z_0} = 0.$$

Ricordiamo che l'equazione canonica di un piano passante per il punto (x_0, y_0, z_0) è $a(x_0 - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ dove (a, b, c) rappresenta un vettore ortogonale al piano stesso. Quindi abbiamo che

$$\vec{n} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right) \qquad \Rightarrow \qquad \|\vec{n}\| = \frac{\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}.$$

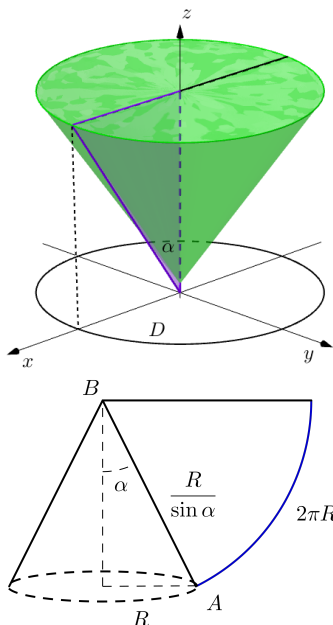
Per calcolare $\cos\vartheta$ usiamo la definizione di prodotto scalare tra vettori. Siccome sia $\vec{n}$ che $\vec{k} = (0, 0, 1)$ hanno norma unitaria,

$$\langle \vec{n}, \vec{k} \rangle = \|\vec{n}\| \cdot \|\vec{k}\| \cos\vartheta = \cos\vartheta \quad \Rightarrow \quad \langle \vec{n}, \vec{k} \rangle = \cos\vartheta$$

$$\Rightarrow \quad \left\langle \frac{\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}, (0, 0, 1) \right\rangle = \cos\vartheta \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} = \cos\vartheta.$$

Così l'area della superficie del grafico di $f(x, y)$ sopra il dominio D è data da

$$S = \iint_D ds = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy. \tag{1.5}$$

Esempio 1.25. Calcolare l'area della superficie del cono data dall'equazione $z = m\sqrt{x^2 + y^2}$ con $0 \leq z \leq mR$, dove $m = 1/\tan\alpha$. Per applicare la (1.5) calcoliamo le derivate parziali della funzione $f(x, y) = m\sqrt{x^2 + y^2}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{mx}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{my}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Allora per la (1.5) si ha

$$|S| = \iint_D \sqrt{1 + \frac{m^2 x^2}{x^2 + y^2} + \frac{m^2 y^2}{x^2 + y^2}}\, dxdy = \iint_D \sqrt{1 + m^2}\, dxdy$$
$$= \sqrt{1 + m^2} \cdot |D| = \frac{\pi R^2}{\sin\alpha}.$$

Infatti, se si immagina di tagliare la superficie laterale del cono lungo una generatrice e di distenderla su un piano si ottiene un settore circolare avente per arco lo sviluppo della circonferenza di base del cono e per raggio l'apotema (cioè il lato AB in figura). Poiché un settore circolare è equivalente ad un triangolo avente per base l'arco rettificato e per altezza il raggio R, l'area di tale settore è

$$\frac{2\pi R \cdot AB}{2} = \frac{\pi R^2}{\sin\alpha}.$$

Si osservi inoltre che l'area totale del cono è data dalla somma dell'area della superficie laterale trovata e dell'area del cerchio di base.

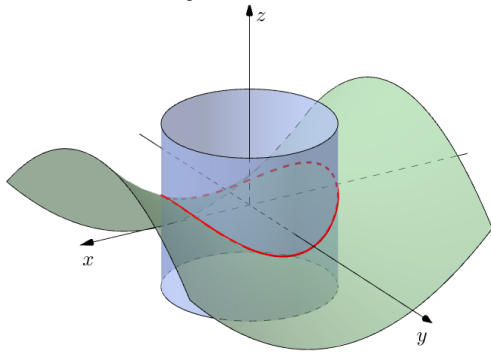
Esempio 1.26. Calcolare l'area della superficie della sfera di raggio unitario. Per ragioni di simmetria è sufficiente calcolare il doppio dell'area della superficie della semisfera superiore. Sia $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$, allora le derivate parziali sono

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2-y^2}+\frac{y^2}{1-x^2-y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

Quindi

$$|S| = 2\iint\limits_{\{x^2+y^2\le 1\}} \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \overset{\Phi^{-1}(D)}{=} 2\int_{\rho=0}^{1}\int_{\vartheta=0}^{2\pi} \frac{\rho\, d\rho d\vartheta}{\sqrt{1-\rho^2}} = 4\pi\int_{\rho=0}^{1}\frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} = -4\pi\int_{\rho=0}^{1}\frac{d\left(-\rho^2/2\right)}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$= -2\pi\int_{\rho=0}^{1}\frac{d\left(1-\rho^2\right)}{\sqrt{1-\rho^2}} = -2\pi\left[2\sqrt{1-\rho^2}\right]_0^1 = 4\pi.$$

Esempio 1.27. Calcolare l'area della superficie del paraboloide iperbolico $z = x^2 - y^2$ che si trova all'interno del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

Si tratta di calcolare l'integrale doppio

$$|S| = \iint\limits_{D} \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy,$$

dove

$$f(x,y) = x^2 - y^2, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1.\}$$

Si ha

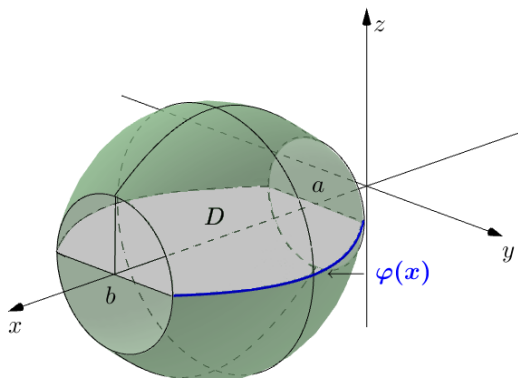
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1+4x^2+4y^2}.$$

Quindi

$$\iint\limits_{D} \sqrt{1+4x^2+4y^2}\, dxdy \overset{\Phi^{-1}(D)}{=} \int_{\rho=0}^{1}\int_{\vartheta=0}^{2\pi} \rho\sqrt{1+4\rho^2}\, d\rho d\vartheta = \frac{\pi}{4}\int_{\rho=0}^{1}\sqrt{1+4\rho^2}\, d(1+4\rho^2)$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[\frac{2}{3}\left(1+4\rho^2\right)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{\pi(5\sqrt{5}-1)}{6}.$$

Area di una superficie ottenuta per rotazione

Molte superfici si possono ottenere facendo ruotare il grafico di una funzione attorno ad un asse. Consideriamo nel piano xy il grafico della funzione $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^+$. Ruotando tale grafico attorno all'asse x si ottiene una superficie di cui vogliamo calcolare l'area. Per ottenere il risultato tramite un integrale doppio, abbiamo bisogno di individuare un dominio D di integrazione e una funzione $f(x,y)$ da integrare. Si può osservare che la proprietà di cui gode la superficie ottenuta per rotazione è che la distanza dei punti di questa superficie dall'asse x è data proprio da $\varphi(x)$ ($\varphi(x)$ è il raggio di una sezione), e poiché questa distanza è data da $\sqrt{y^2+z^2}$, avremo che

$$\sqrt{y^2+z^2} = \varphi(x).$$

Ora per determinare la funzione, esplicitiamo la variabile z,

$$f(x,y) = z = \pm\sqrt{\varphi^2(x) - y^2},$$

dove il segno $\pm$ stanno ad indicare la parte superiore e la parte inferiore della superficie. Dato che tali superfici sono simmetriche, per il calcolo dell'area richiesta è sufficiente calcolare due volte l'area superiore. A questo punto il dominio di integrazione è

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ -\varphi(x) \le y \le \varphi(x)\}.$$

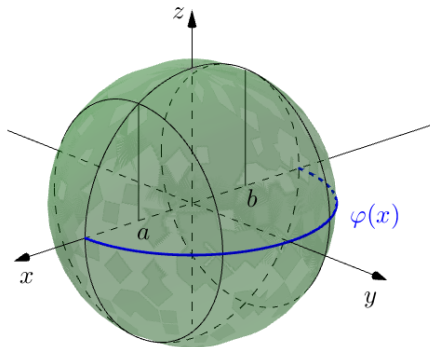
Infine, applicando la (1.5) si ha

$$
\begin{aligned}
|S| &= 2\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy = 2\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\varphi(x)\varphi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x)-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{\varphi(x)-y^2}}\right)^2}\,dxdy\\
&= 2\iint_D \sqrt{\frac{\varphi^2(x)-y^2+\varphi^2(x)(\varphi'(x))^2+y^2}{\varphi^2(x)-y^2}}\,dxdy = 2\iint_D \varphi(x)\frac{1+\sqrt{(\varphi'(x))^2}}{\sqrt{\varphi^2(x)-y^2}}\,dxdy\\
&= 2\iint_D \frac{\sqrt{1+(\varphi'(x))^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{\varphi(x)}\right)^2}}\,dxdy = 2\int_{x=a}^{b}\sqrt{1+(\varphi'(x))^2}\int_{y=-\varphi(x)}^{\varphi(x)}\frac{dy}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{\varphi(x)}\right)^2}}\,dx\\
&= 2\int_{x=a}^{b}\varphi(x)\sqrt{1+(\varphi'(x))^2}\int_{y=-\varphi(x)}^{\varphi(x)}\frac{d(1/\varphi(x))}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{\varphi(x)}\right)^2}}\,dx\\
&= 2\int_{x=a}^{b}\varphi(x)\sqrt{1+(\varphi'(x))^2}\left[\arcsin\left(\frac{y}{\varphi(x)}\right)\right]_{y=-\varphi(x)}^{\varphi(x)}\,dx = \pi\int_{x=a}^{b}\varphi(x)\sqrt{1+(\varphi'(x))^2}\,dx,
\end{aligned}
$$

e si ottiene la formula

$$
|S| = \pi\int_{x=a}^{b}\varphi(x)\sqrt{1+(\varphi'(x))^2}\,dx. \tag{1.6}
$$

Esempio 1.28. Calcolare l'area della parte di sfera di centro l'origine e raggio R compresa tra i piani paralleli

$x = a$ e $x = b$, con $-R \le a \le b \le R$. Possiamo considerare la sfera come la superficie che si ottiene ruotando la semicirconferenza nel piano xy di equazione $\varphi(x) = \sqrt{R^2-x^2}$ e applicare la (1.6)

$$
\begin{aligned}
|S| &= 2\pi\int_a^b \sqrt{R^2-x^2}\cdot\left(1+\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2 dx\\
&= 2\pi\int_a^b \sqrt{R^2-x^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dx = 2\pi R(b-a).
\end{aligned}
$$

Quindi tale area dipende solo dalla distanza dei due punti e dal raggio della sfera. Se $b = R$ e $a = -R$ si ottiene l'area della sfera $4\pi R^2$.

Centro di massa e momento d'inerzia

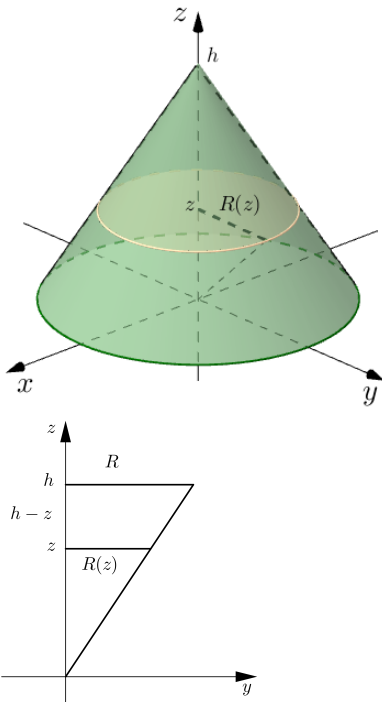
Per un solido che occupa una regione dello spazio D e avente densità di massa continua $\delta(x, y, z)$, il *centro di massa* $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ è dato da

$$
\bar{x} = \frac{\iiint_D x\cdot\delta(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_D \delta(x,y,z)\,dxdydz},\ \bar{y} = \frac{\iiint_D y\cdot\delta(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_D \delta(x,y,z)\,dxdydz},\ \bar{z} = \frac{\iiint_D z\cdot\delta(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_D \delta(x,y,z)\,dxdydz}.
$$

Analoghe formule valgono per distribuzioni di massa mono e bidimensionali. Il *momento d'inerzia* dello stesso solido attorno ad un asse l è dato da

$$
I = \iiint_D d^2\left((x,y,z),l\right)\delta(x,y,z)\,dxdydz,
$$

dove $d^2\left((x,y,z),l\right)$ indica la distanza al quadrato del punto (x, y, z) dalla retta l.

Esempio 1.29. Calcolare il centro di massa di un cono omogeneo di altezza h e raggio di base R.

Possiamo porre $\delta(x, y, z) = 1$ e posizionando il cono con la base su piano xy, per simmetria si ha $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Quindi è sufficiente calcolare la coordinata $\bar{z}$ del centro di massa, ossia

$$\bar{z} = \frac{1}{|D|} \iiint_D z \, dxdydz.$$

Poiché il volume del cono è $\pi h R^2/3$ (vedi esempio 1.20), basta calcolare l'integrale triplo della funzione z. Impostiamo l'integrale per sezioni:

$$\iiint_D z \, dxdydz = \int_{z=0}^{h} \iint_{D(z)} z \, dxdydz,$$

dove l'insieme

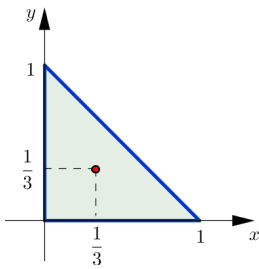
$$D(z) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq (R(z))^2\},$$

rappresenta la sezione circolare che si ottiene alla quota $z \in [0, h]$. L'espressione del raggio $R(z)$ si ottiene grazie alla proporzione dovuta alla similitudine dei triangoli rettangoli in figura

$$\frac{R(z)}{h - z} = \frac{R}{h} \quad \Rightarrow \quad R(z) = \frac{R(h - z)}{h}.$$

Quindi

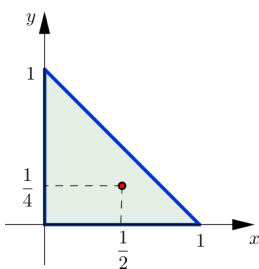
$$\begin{aligned}
\bar{z} := \frac{1}{|D|} \int_{z=0}^{h} \iint_{D(z)} z \, dxdydz &= \frac{3}{\pi R^2 h} \int_{z=0}^{h} z \iint_{D(z)} dxdydz = \frac{3}{\pi R^2 h} \int_{z=0}^{h} z \cdot |D(z)| \, dz \\
&= \frac{3}{\pi R^2 h} \int_{z=0}^{h} z \cdot \frac{\pi R^2 (h - z)^2}{h^2} \, dz = \frac{3}{h^3} \int_{z=0}^{h} z(h - z)^2 \, dz = \frac{3}{h^3} \int_{z=0}^{h} (zh^2 + z^3 - 2hz^2) \, dz \\
&= \frac{3}{h^3} \left[\frac{h^2 z^2}{2} + \frac{z^4}{4} - \frac{2hz^3}{3} \right]_0^h = \frac{3}{h^3} \left(\frac{h^4}{2} + \frac{h^4}{4} - \frac{2h^4}{3} \right) = 3h \cdot \frac{1}{12} = \frac{h}{4}.
\end{aligned}$$

Esempio 1.30. Calcolare il centro di massa del triangolo equilatero di lato unitario nei casi in cui $\delta(x, y) = 1$ e $\delta(x, y) = x$.

Consideriamo inizialmente il caso in cui la densità di massa è costante. Si tratta di calcolare

$$\bar{x} = \frac{1}{|D|} \iint_D x \, dxdy = 2 \int_{x=0}^{1} x \int_{y=0}^{1-x} dxdy = 2 \int_{x=0}^{1} x - x^2 \, dx = \frac{1}{3}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{|D|} \iint_D y \, dxdy = 2 \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1-x} y \, dxdy = \int_{x=0}^{1} (1 - x)^2 \, dx = \frac{1}{3}.$$

Con un calcolo simile si può verificare che in generale, il centro di massa di un triangolo omogeneo è dato dalla media delle coordinate dei vertici.

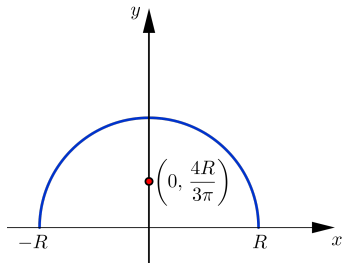
Consideriamo ora il caso in cui la densità di massa è $\delta(x, y) = x$. Calcoliamo prima di tutto la massa del triangolo, che è data da

$$m = |D| = \iint_D x \, dxdy = \int_{x=0}^{1} x \int_{y=0}^{1-x} dxdy = \int_{x=0}^{1} x - x^2 \, dx = \frac{1}{6}.$$

Allora si ha

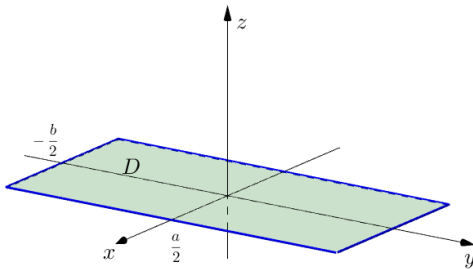
$$\bar{x} = \frac{1}{|D|} \iint_D x^2 \, dxdy = 6 \int_{x=0}^{1} x^2 \int_{y=0}^{1-x} dxdy = 6 \int_{x=0}^{1} x^2 - x^3 \, dx = \frac{1}{2}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{|D|} \iint_D xy \, dxdy = 6 \int_{x=0}^{1} x \int_{y=0}^{1-x} y \, dxdy = 3 \int_{x=0}^{1} x(1 - x)^2 \, dx = \frac{1}{4}.$$

Esempio 1.31. Calcolare il centro di massa di una semicirconferenza omogenea di raggio R.

Per simmetria, abbiamo che $\bar{x} = 0$. Basta allora calcolare solo

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{1}{|D|}\iint_D y\ dxdy \overset{(\Phi^{-1}(D))}{=} \frac{2}{\pi R^2}\int_{\vartheta=0}^{\pi}\int_{\rho=0}^{R} \rho\cdot\rho\sin\vartheta\ d\rho d\vartheta \\ &= \frac{2}{\pi R^2}\int_{\vartheta=0}^{\pi}\sin\vartheta\ d\vartheta\int_{\rho=0}^{R}\rho^2\ d\rho d\vartheta = \frac{2}{\pi R^2}\left[-\cos\vartheta\right]_0^{\pi}\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^R \\ &= \frac{2}{\pi R^2}\cdot 2\cdot\frac{R^3}{3} = \frac{4R}{3\pi}.\end{aligned}$$

Esempio 1.32. Calcolare per il rettangolo $D = [-a/2, a/2] \times [-b/2, b/2]$ il rapporto I/m rispetto all'asse z.

Per il calcolo della massa del rettangolo, considerato omogeneo con $\delta(x, y, z) = 1$, abbiamo che $m = ab$. Per il calcolo del momento d'inerzia, dobbiamo calcolare

$$\begin{aligned}I &= \iint_D x^2+y^2\ dxdy = \int_{y=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_{x=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2+y^2\ dxdy \\ &= 4\int_{x=0}^{\frac{a}{2}}\int_{y=0}^{\frac{b}{2}} x^2+y^2\ dxdy = 4\int_{x=0}^{\frac{a}{2}}\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_0^{\frac{b}{2}} dxdy \\ &= 4\int_{x=0}^{\frac{a}{2}}\left(\frac{bx^2}{2}+\frac{b^3}{24}\right) dx = 4\left[\frac{bx^3}{6}+\frac{xb^3}{24}\right]_0^{\frac{a}{2}} = \frac{a^3b}{12}+\frac{b^3a}{12}.\end{aligned}$$

Alla fine abbiamo che $I/m = a^2 + b^2/12$.

Esempio 1.33. Calcolare per la sfera omogenea di raggio R, il rapporto I/m rispetto ad una retta passante per il centro.
La massa della sfera, di equazione $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$, è $4\pi R^3/3$ (esempio 1.4-1.13). Inoltre possiamo supporre che la retta sia l'asse z in modo che

$$\begin{aligned}I &= \iiint_{D=\{x^2+y^2+z^2\leq R^2\}} x^2+y^2\ dxdydz \overset{(\Phi_s^{-1}(D))}{=} \int_{\vartheta=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{R}\int_{\varphi=0}^{\pi}\rho^2\sin\varphi\cdot\rho^2\sin^2\varphi\ d\rho d\vartheta d\varphi \\ &= 2\pi\int_{\rho=0}^{R}\rho^4\ d\rho\int_{\varphi=0}^{\pi}\sin^3\varphi\ d\varphi) = 2\pi\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^R\left[\frac{\cos^3\varphi}{3}-\cos\varphi\right]_0^{\pi} = \frac{8\pi R^5}{15} \\ \Rightarrow\ \frac{I}{m} &= \frac{8\pi R^5}{15}\cdot\frac{3}{4\pi R^3} = \frac{2R^2}{5}.\end{aligned}$$

Volume di un solido ottenuto per rotazione

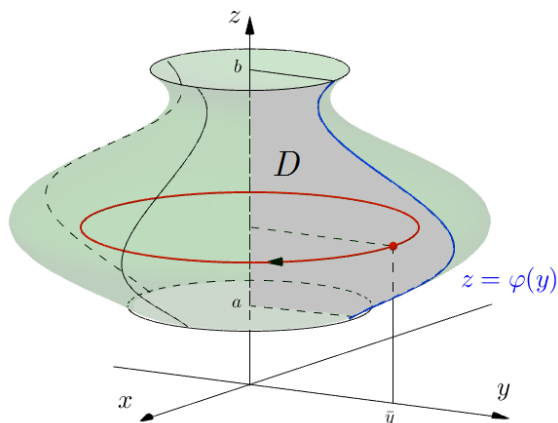
Sia f una funzione non negativa definita per $a \leq z \leq b$ nel piano zy e consideriamo l'insieme

$$D = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : a \leq z \leq b,\ 0 \leq y \leq f(z)\}.$$

Inoltre sia S l'insieme ottenuto ruotando D attorno all'asse z,

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq z \leq b,\ 0 \leq x^2 + y^2 \leq f^2(z)\},$$

Integrando per sezioni, il volume di S è dato da

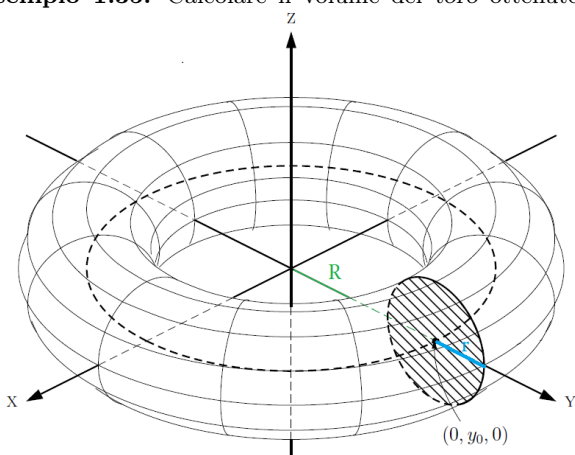
$$|S| = \iiint_S dxdydz = \int_{z=a}^{b}\iint_{S(z)} dxdydz = \int_{z=a}^{b}\pi|S(z)|dz = \pi\int_{z=a}^{b} f^2(z)dz$$

Si può inoltre osservare che, passando in coordinate cilindriche si ha che il volume $|S|$ è uguale a

$$|S| = \iiint_S dxdydz = 2\pi \int_{z=a}^{b} \int_{\rho=0}^{f(z)} \rho \, d\rho dz$$
$$= 2\pi \iint_D \rho \, d\rho dz = 2\pi \cdot \bar{\rho} \cdot |D|,$$

dove $\bar{\rho}$ è la coordinata y del centro di massa dell'insieme D. Tale relazione viene indicata come *teorema di Pappo-Guldino.*

Esempio 1.34. Con riferimento all'esempio 1.31, il centro di massa del semicerchio può essere calcolato conoscendo il volume della sfera e l'area del semicerchio:

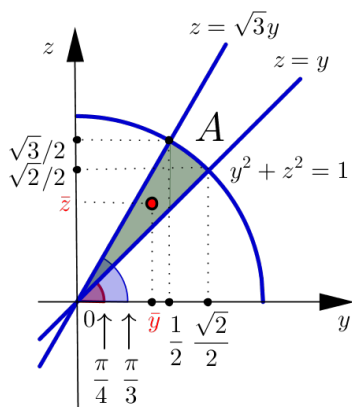
$$\frac{4\pi R^3}{3} = 2\pi \cdot \bar{y} \cdot \frac{\pi R^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \bar{y} = \frac{4R}{3\pi}.$$

Esempio 1.35. Calcolare il volume del *toro* ottenuto ruotando un cerchio di raggio r attorno all'asse z distante R dal centro del disco. Per il teorema di Pappo-Guldino, dato che il centro di massa del cerchio coincide con il centro geometrico, abbiamo che

$$V = 2\pi \cdot R \cdot \pi r^2.$$

Tale volume è uguale al volume del cilindro che si ottiene *tagliando* il toro lungo il cerchio generatore e *raddrizzandolo*.

Esempio 1.36. Sia

$$A = \left\{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < z < \sqrt{3}y, \; y^2 + z^2 \leq 1\right\}.$$

Sia C_1 il solido ottenuto ruotando A di π attorno all'asse z e C_2 quello ottenuto ruotando A di $\pi/2$ attorno all'asse y. Calcolare l'area di A, il volume di C_1 e il volume di C_2. Per calcolare l'area dell'insieme A rappresentato in figura, dovremo calcolare

$$|A| = \iint_A dxdy.$$

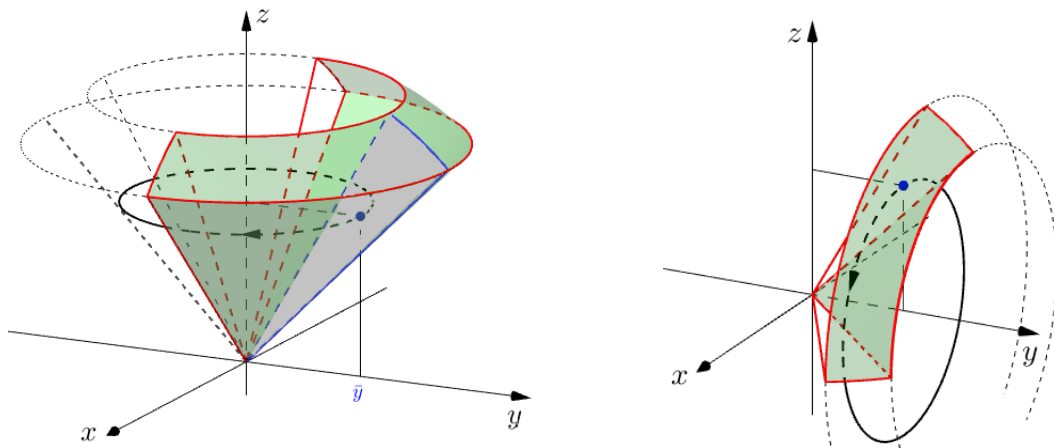
Passando in coordinare polari, con la trasformazione $\Phi(\rho, \vartheta)$ definita da

$$\Phi(\rho,\vartheta) : \begin{cases} y = \rho\cos\vartheta \\ z = \rho\sin\vartheta, \end{cases} \quad , \rho \in [0,1], \vartheta \in [\pi/4, \pi/3],$$

e ricordando il fattore jacobiano di trasformazione, si ottiene

$$|A| = \iint_A dydz = \int_{\rho=0}^{1} \int_{\vartheta=\pi/4}^{\pi/3} \rho \, d\rho d\vartheta = \int_{\rho=0}^{1} \rho \, d\rho \int_{\vartheta=\pi/4}^{\pi/3} d\vartheta$$
$$= \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^1 [\vartheta]_{\pi/4}^{\pi/3} = \frac{\pi}{24}.$$

Per calcolare i volumi dei solidi C_1 e C_2 applichiamo il teorema di Pappo-Guldino. Allora

$$|C_1| = \pi \cdot \bar{y} \cdot |A|, \qquad |C_2| = \frac{\pi}{2} \cdot \bar{z} \cdot |A|,$$

dove $\bar{y}$ e $\bar{z}$ sono rispettivamente la coordinata y e la coordinata z del baricentro dell'insieme A. Abbiamo che

$$\bar{y} = \frac{1}{|A|} \iint_A y\; dydz, \qquad \bar{z} = \frac{1}{|A|} \iint_A z\; dydz,$$

così

$$|C_1| = \pi \iint_A y\; dydz, \qquad |C_2| = \frac{\pi}{2} \iint_A z\; dydz.$$

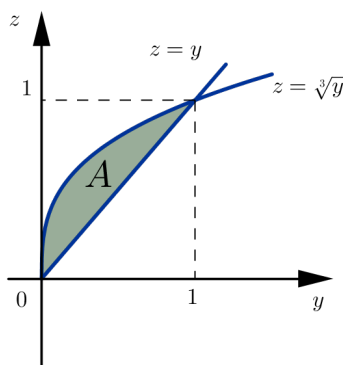
Utilizzando nuovamente la trasformazione $\Phi(\rho, \vartheta)$, si ha che

$$|C_1| = \pi \int_{\rho=0}^{1} \int_{\vartheta=\pi/4}^{\pi/3} \rho^2 \cos\vartheta \; d\rho d\vartheta = \pi \int_0^1 \rho^2\; d\rho \int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos\vartheta \; d\vartheta = \pi \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^1 [\sin\vartheta]_{\pi/4}^{\pi/3} = \frac{\pi}{6}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right),$$

$$|C_2| = \frac{\pi}{2} \int_{\rho=0}^{1} \int_{\vartheta=\pi/4}^{\pi/3} \rho^2 \sin\vartheta \; d\rho d\vartheta = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \rho^2\; d\rho \int_{\pi/4}^{\pi/3} \sin\vartheta \; d\vartheta = \frac{\pi}{2} \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^1 [-\cos\vartheta]_{\pi/4}^{\pi/3} = \frac{\pi}{12}\left(\sqrt{2}-1\right).$$

Esempio 1.37. Sia

$$A = \left\{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq z^3 \leq y \leq z\right\}.$$

Sia C_1 il solido ottenuto ruotando A di $\pi/2$ attorno all'asse z e C_2 quello ottenuto ruotando A di 2π intorno all'asse y. Calcolare il volume di C_1 e il baricentro di C_2. Per calcolare il volume del solido omogeneo C_1 applichiamo il teorema di Pappo-Guldino, cioè

$$|C_1| = \frac{\pi}{2} \cdot \bar{y} \cdot |A|, \quad \text{con} \quad \bar{y} := \frac{1}{|A|} \iint_A y\; dydz,$$

dove $|A|$ è l'area dell'insieme A (che possiamo supporre omogeneo) e $\bar{y}$ è la coordinata y del baricentro di A. Pertanto è sufficiente calcolare

$$|C_1| = \frac{\pi}{2} \iint_A y\; dydz = \frac{\pi}{2} \int_{y=0}^{1} \int_{z=y}^{\sqrt[3]{y}} y\; dydz = \frac{\pi}{2} \int_0^1 y^{4/3} - y^2\; dy$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[\frac{3y^{7/3}}{7} - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{21}.$$

Per calcolare il baricentro del solido omogeneo C_2 che si ottiene ruotando A di 2π attorno all'asse y, per simmetria avremo che $\bar{x} = \bar{z} = 0$, pertanto sarà sufficiente calcolare

$$\bar{y} := \frac{1}{|C_2|} \iiint_{C_2} y\; dydz,$$

dove $|C_2|$ è il volume del solido C_2. Per il calcolo del volume di C_2, applicando ancora il teorema di Pappo-Guldino, abbiamo

$$|C_2| = 2\pi \cdot \bar{z} \cdot |A|, \quad \text{con} \quad \bar{z} := \frac{1}{|A|} \iint_A z\; dydz,$$

dove $|A|$ è l'area dell'insieme omogeneo A e $\bar{z}$ è la coordinata z del baricentro dello stesso insieme A. Pertanto

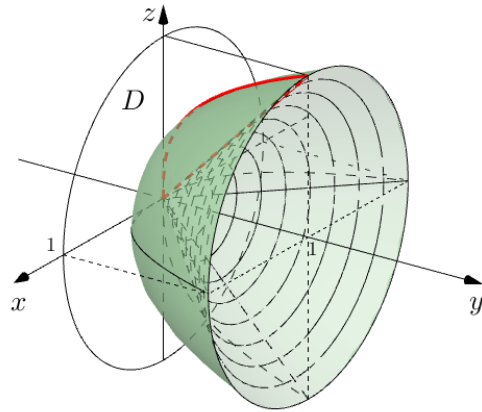
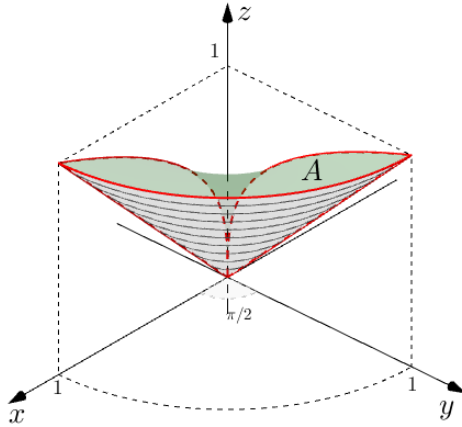
$$|C_2| = 2\pi \iint_A z\ dydz = 2\pi \int_{y=0}^{1} \int_{z=y}^{\sqrt[3]{y}} z\ dydz = 2\pi \int_{y=0}^{1} \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=y}^{\sqrt[3]{y}} dy = \pi \int_0^1 y^{2/3} - y^2\ dy = \frac{4\pi}{15}.$$

Per il calcolo dell'integrale triplo su C_2 è conveniente integrare per fili,

$$\bar{y} = \frac{1}{|C_2|} \iiint_{C_2} z\ dydzdz = \frac{15}{4\pi} \iint_D \left(\int_{y=z^3}^{z} z\ dy\right) dxdz,$$

dove $D = \{(x;z) \in \mathbb{R}^2 : x^2+z^2 \leq 1\}$. Con la trasformazione $\Phi(\rho,\vartheta) = (\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta)$ per $\rho \in [0,1], \vartheta \in [0,2\pi]$, otteniamo

$$\bar{y} = \frac{15}{4\pi} \iint_D \left(\int_{y=z^3}^{z} z\ dy\right) dxdz = \frac{15}{4\pi} \iint_{\Phi^{-1}(D)} z^2 - z^4\ dxdz = \frac{15}{4\pi} \int_{\rho=0}^{1} \int_{\vartheta=0}^{2\pi} \rho\left(\rho^2\sin^2\vartheta - \rho^4\sin^4\vartheta\right)\ d\rho d\vartheta$$

$$= \frac{15}{4\pi} \int_{\rho=0}^{1} \rho^3\ d\rho \underbrace{\int_{\vartheta=0}^{2\pi} \sin^2\vartheta\ d\vartheta}_{=\pi} - \frac{15}{4\pi} \int_{\rho=0}^{1} \rho^5\ d\rho \underbrace{\int_{\vartheta=0}^{2\pi} \sin^4\vartheta\ d\vartheta}_{=3\pi/4} = \frac{15}{4\pi}\cdot\frac{1}{4}\cdot\pi - \frac{15}{4\pi}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{3\pi}{4} = \frac{15}{32}.$$

Esempio 1.38. Sia

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+8z^2 \leq 1,\ z \geq 0\right\};$$

calcolare il baricentro di C. L'insieme E rappresenta l'emisfero positivo di un ellissoide a sezione circolare di semiassi $a = 1$, $b = 1$ e $c = 1/2\sqrt{2}$. Per il calcolo del baricentro, vista la particolare simmetria del solido, è sufficiente calcolare la coordinata $\bar{z}$ in quanto $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Ricordando che il volume dell'ellissoide è dato da $4/3\pi abc$ otteniamo

$$\bar{z} = \frac{1}{|E|} \iiint_E z\, dxdydz, \qquad \text{con} \qquad |E| = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi abc\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{2}}.$$

Per il calcolo dell'integrale, integrando per sezioni, si ha

$$\iiint_E z\, dxdydz = \int_{z=0}^{1/2\sqrt{2}} z \left(\iint_{E(z)} dxdy\right) dz,$$

dove $E(z) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1-8z^2\right\}$. Osservando che l'integrale doppio sull'insieme $E(z)$ non è altro che l'area del cerchio di centro l'origine e raggio $\sqrt{1-8z^2}$, abbiamo che

$$\int_{z=0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} z\left(\iint_{E(z)} dxdy\right) dz = \int_{z=0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} z\pi\left(1-8z^2\right)\ dz = \pi \int_{z=0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} z - 8z^3\ dz = \pi\left[\frac{z^2}{2} - 2z^4\right]_{z=0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \pi\left[\frac{1}{16} - \frac{1}{32}\right] = \frac{\pi}{32}.$$

Allora la coordinata $\bar{z}$ del baricentro è

$$\bar{z} = \frac{1}{|E|} \iiint_E z\, dxdydz = \frac{3\sqrt{2}}{\pi}\cdot\frac{\pi}{32} = \frac{3\sqrt{2}}{32}.$$